

Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Braunschweig
genehmigte Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.)

vorgelegt von
Dipl.-Math. Jan Steindorf

| | |
|----------------------|-----------------------------------|
| Datum der Promotion: | 13. Juni 2002 |
| 1. Referent: | Prof. Hermann G. Matthies, Ph. D. |
| 2. Referent: | Prof. Dr. Dieter Dinkler |
| Eingereicht am: | 1. November 2001 |

Kurzfassung

Die numerische Simulation der Wechselwirkung von Fluid und Struktur ist eine der großen Herausforderungen auf dem Gebiet des Wissenschaftlichen Rechnens. Typische Beispiele für Fluid-Struktur Interaktion sind aeroelastische Probleme – wie zum Beispiel die elastischen Verformungen von Flugzeugtragflügeln in einer Luftströmung – oder biomechanische Vorgänge, bei denen unter anderem die Bewegung von elastischen Strukturen (z.B. Herzklappen) in einer Blutströmung untersucht wird. Bei der Wechselwirkung von Strömung und Struktur handelt es sich sehr oft um stark nichtlineare Probleme. Die Berechnung dieser nichtlinearen Fluid-Struktur Interaktionsprobleme erfordert die simultane Lösung der stark gekoppelten Bewegungsgleichungen der Strömung und der Struktur. Die Kopplung von Fluid und Struktur findet an der Fluid-Struktur Interface statt, auf der kinematische und dynamische Kopplungsbedingungen erfüllt werden müssen.

In dieser Arbeit werden partitionierte Verfahren zur Berechnung der Fluid-Struktur Interaktion betrachtet. Dieses bedeutet, daß vorhandene Löser für die Teilprobleme eingesetzt werden. Partitionierte Verfahren erlauben die Verwendung von effizienten Diskretisierungs- und Lösungsverfahren für jedes Teilproblem. Außerdem unterstützen sie die Wiederverwendung von existierender und hochentwickelter Software und bieten einen modularen Lösungsansatz. Das gekoppelte Problem wird bei partitionierten Verfahren durch ein gekoppeltes Lösungsverfahren berechnet, bei dem das Fluid- und das Strukturproblem getrennt voneinander gelöst werden und in jedem Zeitschritt bzw. in jeder Iteration des Kopplungsalgorithmus die Kopplungsgrößen ausgetauscht werden. Es existieren verschiedene Möglichkeiten für die Kopplung der Teillöser: die Kopplungsbedingungen und das sich bewegende Interface können vollkommen explizit oder implizit oder in einer gemischten expliziten/impliziten Form behandelt werden. Dadurch wird ein glatter Übergang zwischen schwacher und starker Kopplung der Löser ermöglicht. Aus Stabilitäts- und Genauigkeitsgründen wird oft eine vollkommen implizite Formulierung gewählt. Bei diesem Ansatz muß in jedem Zeitschritt ein großes System von nichtlinearen gekoppelten Gleichungen mit Hilfe der (iterativen) Löser für die Teilprobleme gelöst werden. Dieses geschieht in den meisten Fällen mit Block-Jakobi-, Block-Gauß-Seidel- oder verwandten Relaxationsverfahren. Es existiert allerdings eine Forderung nach effizienteren stark gekoppelten Lösungsverfahren, da diese einfachen Methoden häufig eine hohe Anzahl von Iterationen benötigen oder nicht immer konvergieren. Wir stellen in dieser Arbeit einen neuen Ansatz vor, dessen Grundlage ein approximatives Block-Newton Verfahren bildet. Dieses Verfahren verhält sich für nichtlineare Probleme stabiler als eine Block-Gauß-Seidel Iteration und besitzt auch eine höhere Konvergenzordnung. Wir demonstrieren die Wirkungsweise des neu entwickelten Verfahrens anhand von mehreren zweidimensionalen Beispielen und vergleichen seine Effizienz mit den gestaffelten Verfahren und der Block-Gauß-Seidel Iteration.

Abstract

The numerical simulation of fluid-structure interaction problems is one of the great challenges in scientific computing. Typical examples for fluid-structure interaction arise in aero-elasticity where air flow around an elastic aircraft or oscillations of air-foils in air flow are computed, or in bio-mechanics where the elastic behaviour of micro-pumps or artificial membranes in blood flow is considered. Often, fluid-structure interaction problems are highly nonlinear coupled problems. The computation of those nonlinear fluid-structure interaction problems requires the simultaneous solution of the strongly coupled fluid and structural equations of motion. The coupling of the fluid and the structure occurs at the fluid-structure interface where kinematic and dynamic coupling conditions are imposed.

In this thesis, we consider partitioned methods for fluid-structure interaction, i.e. separate solvers are used for the fluid and the structure. Partitioned procedures allow the use of well established discretisation and solution methods for each subproblem. They also support the reuse of existing and highly developed software and offer a modular solution approach. In partitioned methods, the coupled problem is computed with a solution procedure where the fluid and the structure are separately solved and exchange data in every time-step or iteration of the coupling algorithm. There exist various procedures how to couple the fluid and structure solvers: the coupling conditions and the moving interface can be treated in a fully explicit or implicit or in a mixed explicit/implicit manner. This approach allows a smooth transition between “loose” and “strong” coupling. For stability and accuracy reasons, often a fully implicit formulation has to be used. In this approach, we have to solve a large system of nonlinear equations with the use of the (iterative) solvers for the subsystems. Usually, this is done with Block-Jakobi, Block-Gauss-Seidel or related relaxation methods. Nevertheless, there is a demand for more sophisticated solution methods as the simple methods do not always converge. We will introduce here an approximative Block-Newton method which is shown to be superior to the standard Block-iterative methods. We will demonstrate the new method for several two-dimensional applications and compare the efficiency with explicit partitioned methods and Block-Gauss-Seidel iterations.

Vorwort und Danksagung

Diese Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Wissenschaftliches Rechnen der Technischen Universität Braunschweig, das im November 1995 von Herrn Prof. Matthies neu gegründet wurde. Das Wissenschaftliche Rechnen („Scientific Computing“) kann als eine Schnittstelle zwischen mehreren Fachgebieten angesehen werden: Mathematik, Informatik und Anwendungen aus verschiedenen Bereichen (z.B. Physik, Luft- und Raumfahrt, Bauingenieurwesen, Medizin). Dieses spiegelt sich auch in dieser Arbeit wider: Als Anwendung werden Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung gewählt, die als Systeme von partiellen Differentialgleichungen formuliert werden. Diese Systeme werden mit partitionierten Verfahren numerisch gelöst, was den Bezug zur Mathematik darstellt. Die Informatik-Komponente ergibt sich aufgrund des Einsatzes eines Kopplungsinterfaces zur Realisierung der Kopplungsalgorithmen auf einem Parallelrechner (Cray T3E).

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Matthies für die sehr gute Betreuung und die große Unterstützung während meiner Promotionszeit am Institut für Wissenschaftliches Rechnen danken. Insbesondere bin ich ihm für die zahlreichen Diskussionen und die mir ermöglichte Freiheit bei der Bearbeitung des Dissertationsthemas sehr dankbar.

Weiter will ich mich bei Herrn Prof. Dr. Dinkler für die Übernahme des Koreferates und die vielen Hinweise und Vorschläge zu meiner Arbeit bedanken. Herr Prof. Dr. Dinkler hat als Sprecher des Graduiertenkollegs „Wechselwirkung Struktur und Fluid“ viele interessante Veranstaltungen im Rahmen des Graduiertenkollegs ermöglicht, die mir bei meiner Arbeit sehr geholfen haben.

In diesem Zusammenhang möchte ich auch die Diskussionen mit den Kollegiaten bei diesen Veranstaltungen erwähnen, die für meine Arbeit äußerst fruchtbar waren. Insbesondere Elmar Walhorn und Marcus Meyer sei hiermit herzlich gedankt.

Ein besonderer Dank geht auch an meine Kollegen vom Institut für Wissenschaftliches Rechnen, die mich während dieser Zeit bei den unterschiedlichsten Fragestellungen hervorragend unterstützt haben. In chronologischer Reihenfolge: Dr. Josef Schüle, Dr. Jörg Weimar, Christian Heimann, Andreas Keese, Gerd Anton und Oliver Kayser-Herold.

Abschließend möchte ich meinen Eltern für ihre langjährige Unterstützung danken und mich bei allen Freunden und bei meiner Freundin Maike bedanken, die mich insbesondere am Ende der Promotionszeit dazu angetrieben haben, diese Arbeit endlich fertigzustellen. Danke !

Braunschweig, im Dezember 2002

Jan Steindorf

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Bezeichnungen und Abkürzungen | 3 |
| 1 Einleitung | 9 |
| 1.1 Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung | 11 |
| 1.2 Numerische Lösung mit partitionierten Verfahren | 13 |
| 1.3 Gliederung der Arbeit | 16 |
| 2 Mathematische Modellierung von Fluid-Struktur Wechselwirkung | 19 |
| 2.1 Das Modell der Strömungsmechanik | 20 |
| 2.1.1 Die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen | 21 |
| 2.1.2 ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen | 23 |
| 2.2 Das Modell der Strukturmechanik | 26 |
| 2.3 Die Kopplungsbedingungen am Rand von Fluid und Struktur | 29 |
| 3 Diskretisierung von Fluid- und Strukturdynamik | 31 |
| 3.1 Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen | 32 |
| 3.2 Bewegung des Fluidnetzes | 35 |
| 3.2.1 Algorithmus zur Netzverformung | 36 |
| 3.2.2 Geometrische Bilanzgleichungen | 37 |
| 3.2.3 Das gesamte diskrete Fluidproblem | 39 |
| 3.3 Diskretisierung der Strukturdynamik | 40 |
| 3.4 Diskrete Form der Kopplungsbedingungen | 43 |
| 3.4.1 Transfer der Strukturdaten | 45 |
| 3.4.2 Transfer der Fluidlasten | 48 |
| 3.5 Das gesamte diskrete Problem | 52 |
| 4 Kopplungsalgorithmen für partitionierte Verfahren | 55 |
| 4.1 Schwach gekoppelte Algorithmen | 56 |
| 4.1.1 Gestaffelte Verfahren | 57 |
| 4.1.2 Subcycling im Fluid | 61 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.1.3 | Extrapolation der Strukturvariablen | 62 |
| 4.1.4 | Energieerhaltung | 64 |
| 4.1.5 | Parallele Kopplungsalgorithmen | 65 |
| 4.2 | Starke Kopplung der Teillöser | 69 |
| 4.2.1 | Semi-implizite Kopplungsalgorithmen | 70 |
| 4.2.2 | Voll implizite Kopplungsalgorithmen | 73 |
| 4.2.3 | Analyse der stark gekoppelten Lösungsverfahren | 75 |
| 4.3 | Approximative Block-Newton Verfahren | 84 |
| 4.3.1 | Umformulierung des gekoppelten Problems | 85 |
| 4.3.2 | Iterative Lösung des gekoppelten Systems | 87 |
| 5 | Software-Aspekte des Kopplungsinterfaces | 93 |
| 5.1 | Anforderungen an ein Kopplungsinterface | 93 |
| 5.2 | Die Kopplungsbibliothek GRISSLi | 96 |
| 5.3 | Realisierung der Kopplungsalgorithmen | 99 |
| 6 | Anwendungen und Beispiele | 105 |
| 6.1 | Partikelbewegung in einer Strömung | 106 |
| 6.2 | Elastische Struktur in Strömung | 110 |
| 6.3 | Wirbelerregte elastische Struktur | 116 |
| 7 | Zusammenfassung und Ausblick | 124 |
| | Anhang | 127 |
| A | Das eindimensionale Modellbeispiel | 127 |
| B | Verwendete Software für die Beispiele | 132 |
| B.1 | Strukturmechanik (FEAP) | 132 |
| B.2 | Strömungsmechanik (FEATFLOW) | 134 |
| B.3 | Erweiterungen des Fluidlösers | 135 |
| | Literaturverzeichnis | 137 |
| | Abbildungsverzeichnis | 146 |

Bezeichnungen und Abkürzungen

Im folgenden werden die wichtigsten Bezeichnungen und Abkürzungen, die in dieser Arbeit verwendet werden, vorgestellt, um das Lesen dieser Arbeit zu erleichtern. Wir werden die Größen und Variablen entsprechend der Reihenfolge der einzelnen Kapitel aufführen. Zuerst werden also die kontinuierlichen und daraufhin die raum- bzw. zeitdiskreten Größen beschrieben. Dabei kann es in einigen Abschnitten vorkommen, daß bestimmte Parameter bzw. Größen doppelt auftreten. Durch den Zusammenhang im jeweiligen Kapitel wird aber die Bedeutung dieser Parameter eindeutig erklärt.

Funktionenräume und Operatoren

| | |
|--------------------------------|--|
| $L_2(\Omega)$ | Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω |
| $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ | Sobolev-Raum der Ordnung 1 |
| $\text{div}, \text{div}_\xi$ | Divergenz-Operator (Ableitung nach x bzw ξ) |
| $\text{grad}, \text{grad}_\xi$ | Gradienten-Operator |
| Δ | Laplace-Operator |
| A^t | Transponierte des Operators bzw. der Matrix A |
| A^{-1} | Inverse des Operators bzw. der Matrix A |

Kontinuierliche Größen

Die kontinuierlichen Größen werden in dieser Arbeit im allgemeinen durch kleingeschriebene Buchstaben gegeben. Wenn Bezeichnungen sowohl im Fluid als auch in der Struktur vorkommen, so werden diese mit dem zusätzlichen Index f (für das Fluid) bzw. s für die Struktur versehen (z.B. ρ_f für die Dichte des Fluides und ρ_s für die Dichte der Struktur).

| | |
|----------------|--|
| Ω_f | Fluidgebiet |
| Γ_f | Rand des Fluidgebietes |
| v | Geschwindigkeitsfeld des Fluides |
| p | Druck im Fluid |
| ρ, ρ_f | Dichte des Fluides |
| σ_f | Cauchy'scher Spannungstensor des Fluides |

| | |
|-------------------|---|
| g | äußere Kräfte des Fluidproblems |
| ν | dynamische Viskosität des Fluides |
| D | Verzerrungs-Geschwindigkeitstensor des Fluides |
| v_0 | Anfangswerte des Geschwindigkeitsfeldes im Fluid |
| v_r | Randgeschwindigkeiten des Fluides |
| τ_f | Randspannungen des Fluides |
| \mathcal{Q}^f | Ansatzraum für den Druck |
| \mathcal{V}^f | Ansatzraum für die Fluidgeschwindigkeiten |
| \mathcal{V} | Lösungsraum der Fluidgeschwindigkeiten |
| | |
| $\Omega_f(t)$ | zeitveränderliches Fluidgebiet |
| Γ | sich bewegendes Fluidrand |
| v_g | Geschwindigkeit des sich bewegendes Fluidrandes |
| Ω_0 | räumliche Referenzkonfiguration des Fluidgebietes |
| Γ_0 | Referenzkonfiguration von Γ in Ω_0 |
| Φ | Transformation der Referenzkonfiguration Ω_0 in das aktuelle Fluidgebiet $\Omega_f(t)$ |
| ξ | Referenzkoordinaten |
| \dot{x} | Geschwindigkeit des Referenzsystems |
| \mathcal{Q}_0^f | Ansatzraum für den Druck (Referenzkonfiguration) |
| \mathcal{V}_0^f | Ansatzraum für die Fluidgeschwindigkeiten (Referenzsystem) |
| \mathcal{V}_0 | Lösungsraum der Fluidgeschwindigkeiten (Referenzkonfiguration) |
| \mathcal{M}_f | Massenterm der schwachen Form der Fluidgleichungen |
| \mathcal{N}_f | Konvektiver Teil der schwachen Form der Fluidgleichungen |
| \mathcal{K}_f | Diffusionsanteil der schwachen Form der Fluidgleichungen |
| \mathcal{B}_f | Gradiententerm der schwachen Form der Fluidgleichungen |
| \mathcal{G} | rechte Seite der schwachen Form der Fluidgleichungen |
| | |
| Ω_s | materielles Referenzgebiet der Struktur |
| Γ_s | Rand des Strukturgebietes |
| u | Verschiebungen der Struktur |
| \dot{u} | Geschwindigkeiten der Struktur |
| \ddot{u} | Beschleunigungen der Struktur |
| ρ_s | Dichte in der Struktur |
| f | Volumenkräfte des Strukturproblems |
| S | 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor der Struktur |
| E | Green-Lagrangescher Verzerrungstensor in der Struktur |
| F | unsymmetrischer materieller Deformationsgradient |

| | |
|-----------------|---|
| λ, μ | Lamê-Konstanten |
| σ_s | Cauchyscher Spannungstensor in der Struktur |
| u_0 | Anfangswerte für die Verschiebungen der Struktur |
| w_0 | Anfangswerte für die Geschwindigkeiten der Struktur |
| u_r | Randverschiebungen der Struktur |
| τ_s | Randspannungen der Struktur |
| \mathcal{V}_s | Ansatzraum für die Verschiebungen |
| \mathcal{M}_s | Massenterm in der schwachen Form der Strukturgleichungen |
| \mathcal{K}_s | nichtlinearer Anteil der schwachen Form der Strukturgleichungen |
| \mathcal{F} | rechte Seite der schwachen Form der Strukturgleichungen |

Raum- und zeitdiskrete Größen

Die raumdiskreten Größen werden in dieser Arbeit im allgemeinen groß (z.B. U für die raumdiskreten Verschiebungen) oder mit dem Index h geschrieben (z.B. σ_h^f für die raumdiskreten Spannungen des Fluides). Die zeitdiskreten Variablen werden mit dem Index $n + 1$ gekennzeichnet (d.h. V_{n+1} für die raumdiskreten Fluidgeschwindigkeiten zum Zeitpunkt t_{n+1}). Wenn zusätzlich in einem Zeitschritt noch eine Iteration durchgeführt wird (z.B. Newton-Raphson Iteration), dann werden die Größen noch mit einem zusätzlichen Iterationsindex $(k+1)$ versehen (d.h. $V_{n+1}^{(k+1)}$ für eine Iteration der Fluidgeschwindigkeiten).

| | |
|-------------------|--|
| v_h | raumdiskrete Fluidgeschwindigkeiten |
| \hat{V}_i | Knotengeschwindigkeiten des Fluides in den Fluidknoten |
| N_i^f | Formfunktionen für die Fluidgeschwindigkeiten |
| p_h | raumdiskreter Druck |
| \hat{P}_j | Druckwerte in den Druckknoten |
| N_j^p | Formfunktionen für den Druck |
| V | raumdiskreter Vektor der Fluidgeschwindigkeiten |
| P | raumdiskreter Druckvektor |
| \dot{x}_h | Approximation der Gittergeschwindigkeit im Raum |
| \dot{X} | raumdiskreter Vektor der Gittergeschwindigkeiten |
| \mathcal{Q}_h^f | diskreter Ansatzraum für den Druck |
| \mathcal{V}_h^f | diskreter Ansatzraum für die Fluidgeschwindigkeiten |
| M_f | Massenmatrix des Fluidproblems |
| $N_f(\cdot)$ | nichtlineare Advektionsmatrix des Fluides |
| B_f | Gradientenmatrix (Fluid) |
| K_f | Diffusionsmatrix des Fluidproblems |
| G | diskreter Kraftvektor im Fluid |

| | |
|---------------------------|---|
| V_0 | raumdiskreter Startvektor der Fluidgeschwindigkeiten |
| Δt | Zeitschritt des Zeitschrittverfahrens |
| $t_n = n \cdot \Delta t$ | Zeitpunkt t_n |
| V_{n+1} | diskreter Geschwindigkeitsvektor des Fluides zur Zeit t_{n+1} |
| P_{n+1} | diskreter Druckvektor zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| \dot{X}_{n+1} | diskreter Vektor der Gittergeschwindigkeiten zur Zeit t_{n+1} |
| G_{n+1} | diskreter Kraftvektor zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| θ | Parameter des Zeitschrittverfahrens im Fluidlöser |
| $\theta', \tilde{\theta}$ | Parameter der Zwischenschritt- θ -Methode |
| X | raumdiskrete Verschiebungen des Fluidgitters |
| \tilde{M} | fiktive Massenmatrix des Fluidgitters |
| \tilde{C} | fiktive Dämpfungsmatrix des Fluidgitters |
| \tilde{K} | fiktive Steifigkeitsmatrix des Fluidgitters |
| \tilde{F} | Kraftvektor des Fluidgitters |
| \tilde{D} | Transfermatrix für die Strukturverschiebungen |
| X_{n+1} | diskrete Gitterverschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| $V_{n+1}^{(k)}$ | k -ten iterierten Fluidgeschwindigkeiten zur Zeit t_{n+1} |
| $P_{n+1}^{(k)}$ | k -ten iterierten Druckvektoren zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| $F(\cdot)$ | Newton-Iteration im Fluidproblem |
| u_h | raumdiskrete Verschiebungen der Struktur |
| \hat{U}_i | Knotenverschiebungen der Struktur |
| N_i^s | Formfunktionen für die Verschiebungen |
| U | Vektor der Knotenverschiebungen |
| M_s | Massenmatrix der Struktur |
| $K_s(\cdot)$ | nichtlinearer Anteil des Strukturproblems |
| F | raumdiskreter Kraftvektor |
| K_s | Steifigkeitsmatrix des linearisierten Strukturproblems |
| C_s | Dämpfungsmatrix der Struktur |
| U_0 | diskrete Anfangsverschiebungen der Struktur |
| W_0 | diskrete Anfangsgeschwindigkeiten der Struktur |
| W | raumdiskreter Vektor der Strukturgeschwindigkeiten |
| α, β, γ | Parameter der Hilber-Hughes-Taylor- α -Methode |
| A_{n+1} | diskrete Beschleunigungen der Struktur zur Zeit t_{n+1} |
| W_{n+1} | diskrete Strukturgeschwindigkeiten zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| U_{n+1} | diskrete Verschiebungen zur Zeit t_{n+1} |
| $U_{n+1}^{(k)}$ | k -ten iterierten Verschiebungen zur Zeit t_{n+1} |

| | |
|----------------------------------|---|
| $W_{n+1}^{(k)}$ | k -ten iterierten Strukturgeschwindigkeiten zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| $G(\cdot)$ | Newton-Iteration in dem Strukturproblem |
| σ_h^f, σ_h^s | raumdiskrete Cauchy-Spannungstensoren im Fluid bzw. Struktur |
| $\sigma_{n+1}^f, \sigma_{n+1}^s$ | raumdiskrete Spannungstensoren zur Zeit t_{n+1} |
| τ_h^f, τ_h^s | raumdiskrete Spannungsvektoren am Interface |
| Γ_{n+1} | Interface zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| Ω_{n+1} | Fluidgebiet zum Zeitpunkt t_{n+1} |
| U_i^s | Verschiebungen der Strukturknoten am Interface |
| U_j^f | Verschiebungen in Fluidknoten am Interface |
| A_f, A_s | Mortar-Element Matrizen (Fluid bzw. Struktur) |
| f_i^e | Knotenkräfte der Struktur im Knoten i des Elementes e |
| L_j^f, L_k^s | Formfunktionen für die Spannungsvektoren am Interface |
| D_f, D_s | Transfermatrizen für die Randspannungen |
| T_f, T_s | Transfermatrizen für die Randgeschwindigkeiten |
| \tilde{U}_{n+1} | Extrapolationen für Verschiebungen der Struktur |
| \tilde{W}_{n+1} | Prädiktor für die Strukturgeschwindigkeiten |
| E_{n+1}^f | diskrete Arbeit der Fluidkräfte am Interface |
| E_{n+1}^s | diskrete Arbeit der Strukturkräfte am Interface |
| S_f | Schurkomplement-Matrix des linearisierten Fluidproblems |
| S_s | Schurkomplement-Matrix des linearisierten Strukturproblems |
| ω_n | Relaxationsparameter für das Interface |

Weitere Bezeichnungen

Es werden in einigen Abschnitten weitere Bezeichnungen und Abkürzungen verwendet, die dann aber nur in diesen Abschnitten auftreten. Daher werden diese Bezeichnungen hier nicht noch einmal extra aufgeführt. Dabei handelt es sich insbesondere um die Abschnitte, die die geometrischen Erhaltungsgesetze mit Finite Volumen Verfahren erläutern, um die numerische Analyse der stark gekoppelten Lösungsverfahren, um die Beschreibung der approximativen Block-Newton Verfahren oder um die Vorstellung des eindimensionalen Modellbeispiels im Anhang A. Diese Abschnitte lassen sich auch getrennt von den anderen Kapitel lesen, so daß die Abkürzungen hier nicht noch einmal beschrieben werden.

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten Jahren hat die numerische Simulation von Vorgängen aus Natur und Technik enorm an Bedeutung gewonnen. So ist es aufgrund ständig anwachsender Rechenleistung und durch die Entwicklung neuer effizienter Algorithmen mittlerweile möglich, komplexe Systeme am Computer zu simulieren. Zu diesen komplexen Systemen zählen gekoppelte Probleme, die auch als Multi-Physics- oder Mehrfeldprobleme bezeichnet werden. Als erstes sollen Multi-Physics Probleme genauer definiert werden (vgl. [Zie84], [ZC89]):

Definition 1 (Zienkiewicz) *Probleme werden als gekoppelt bezeichnet, wenn für die miteinander verknüpften Variablen des Problems, die unterschiedliche physikalische Vorgänge beschreiben und auf verschiedenen Gebieten erklärt sein können, folgendes gilt:*

1. *Kein Teilproblem kann unabhängig von dem anderen gelöst werden.*
2. *Keine abhängige Variable kann explizit eliminiert werden.*

Die Mehrfeldprobleme werden im allgemeinen in zwei große Klassen aufgeteilt [ZC89]. Die erste Klasse enthält die Probleme, die durch Variablen auf dem gleichen Gebiet gekoppelt sind (volumengekoppelte Probleme). In die zweite Klasse sind die oberflächengekoppelten Probleme einzuordnen, die über einen gemeinsamen Rand gekoppelt sind. Im folgenden werden zwei klassische Vertreter beider Klassen vorgestellt, um den Begriff des Mehrfeldproblems näher zu erläutern.

Ein erstes anschauliches Beispiel für ein gekoppeltes Problem ist die Wechselwirkung von Fluid und Struktur, die z.B. bei der Verformung eines Flugzeugtragflügels durch die Luftumströmung auftritt (Aeroelastik) [Far97]. Die elastische Form des Flügels wird durch die anliegende Strömung beeinflusst, und umgekehrt verändert die Verformung des Flügels auch die Strömung. Es kann also kein Teilproblem unabhängig vom anderen gelöst werden und eine direkte Elimination von einer Variablen (wie des Druckes und der Geschwindigkeiten in der Strömung oder der Verschiebungen und Geschwindigkeiten der elastischen

Struktur) auf dem Level der Differentialgleichungen ist nicht möglich. Bei diesem Beispiel finden unterschiedliche physikalische Vorgänge auf verschiedenen Gebieten statt. Die Kopplung der Teilprobleme tritt explizit nur am Rand dieser Gebiete auf, so daß es sich hier um ein oberflächengekoppeltes Problem handelt. Ein sehr komplexes aeroelastisches Problem tritt z.B. bei der Untersuchung des Flugverhaltens des neuen Großraumflugzeuges A3XX von Airbus auf (s. Abbildung 1.1), da die Abmessungen dieses Flugzeuges extrem groß sind und die dadurch auftretenden Phänomene nahezu unbekannt sind.



Abbildung 1.1: Geplantes Großraumflugzeug A3XX

Ein weiteres Beispiel für ein Multi-Physics Problem ist die Metallumformung [Mie88], [ADPW82]. Bei vielen Metallumformprozessen findet eine Kopplung zwischen strukturellen und thermodynamischen Vorgängen statt. Die thermomechanische Kopplung entsteht dadurch, daß die Spannungen in der Struktur temperaturabhängig sind und bei der Verformung des Metalls Energie und Wärme entstehen, die wiederum die thermischen Prozesse beeinflussen. In diesem Fall sind die Gebiete der Teilprobleme identisch, so daß es sich um ein volumengekoppeltes Problem handelt. Auch hier können die Kopplungsvariablen nicht explizit eliminiert werden. Ein Anwendungsbeispiel für die Metallumformung ist das Dünnbandrollen von Aluminiumplatten.

Die Komplexität von Multi-Physics Problemen entsteht dadurch, daß sich diese Probleme aus verschiedenen physikalischen Teilgebieten – zum Beispiel der Strömungsmechanik, der Strukturmechanik oder der Thermodynamik – zusammensetzen. Die Modelle der Teilprobleme müssen daher physikalisch „korrekt“ miteinander verknüpft werden und die

Formulierungen der Teilprobleme müssen zueinander passen. Diese Problematik zeigt sich insbesondere bei Fluid-Struktur Interaktionsproblemen und wird in dieser Arbeit genauer dargestellt.

1.1 Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung

Wir untersuchen in dieser Arbeit Probleme der Fluid-Struktur Interaktion, die innerhalb der Multi-Physics Probleme eine große und bedeutende Klasse bilden [ZC89], [MO95]. Es existieren zahlreiche, teilweise sehr verschiedene Beispiele für die Wechselwirkung von Strömung und Struktur:

1. Aeroelastische Probleme: In der Aeroelastik wird in vielen Fällen nicht nur das elastische Verhalten eines Tragflügels in einer Luftströmung (insbesondere das Flattern des Tragflügels), sondern die aeroelastische Auslegung von kompletten Flugzeugen [Far97], [RJW⁺99] oder Hubschraubern [Pah98], [Hie99] untersucht.

Ein weiteres aeroelastisches Beispiel ist die Wechselwirkung von Luftströmung und elastischen Brücken. Insbesondere weitgespannte Brücken können durch Windeinwirkung zu starken Schwingungen angeregt werden, die dann zum Einsturz der Brücke führen können. Das wohl bekannteste Beispiel hierfür ist die Tacoma-Brücke (s. Abbildung 1.2).



Abbildung 1.2: *Schwingungen der Tacoma-Brücke*

2. Tanks oder Container, die mit einer Flüssigkeit gefüllt sind. Diese Flüssigkeit kann durch äußere Einflüsse zu Schwingungen angeregt werden und dadurch die Form der Struktur verändern, was zu einer Interaktion mit der Flüssigkeit führt [ML01].
3. Biomechanik: Simulation von Herzklappen oder Mikropumpen im medizintechnischen Bereich, bei denen sich aufgrund der Strömung in einem Fluid (z.B. Blut) die elastischen Strukturen verformen und dadurch wiederum die Strömung beeinflusst wird [NV99], [DPM95], [BS95].

Die mathematische Modellierung dieser Probleme spielt daher eine große Rolle. So wird für eine Blutströmung mit Sicherheit ein anderes Modell gewählt werden müssen als für die Luftströmung um ein Flugzeug bei sehr hohen Geschwindigkeiten. Auch für die Struktur existieren unterschiedliche Modelle, wie am Beispiel des Flugzeugtragflügels und der elastischen Herzklappen erkannt werden kann. Wir wählen hier die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen als Modell für das Fluid, wobei sich der Rand des Fluides bewegen kann. Als Modell für die Struktur nehmen wir eine geometrisch nichtlineare Elastodynamik mit einem linearen Materialgesetz, so daß wir große Verformungen der Struktur berechnen können, die Verzerrungen allerdings als klein annehmen. Mit dieser Wahl der Fluid- und Strukturmodelle lassen sich zahlreiche Probleme der Fluid-Struktur Interaktion sehr gut abbilden, so daß wir insgesamt ein realistisches Modell für diese Probleme erhalten. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt allerdings in der Untersuchung der Kopplung von Fluid und Struktur und der Entwicklung von effizienten Kopplungsalgorithmen und nicht in der Berechnung von komplexen und realitätsnahen Anwendungen.

Die Strömungs- und Strukturgleichungen sind über das Fluid-Struktur Interface gekoppelt, auf dem kinematische und dynamische Kopplungsbedingungen erfüllt sein müssen. Dieses bedeutet, daß auf dem Interface die Verschiebungen und Geschwindigkeiten übereinstimmen müssen und ein Gleichgewicht der Kräfte herrscht. Als ein weiteres Problem bei der Modellierung der Fluid-Struktur Wechselwirkung ergibt sich die unterschiedliche Formulierung der Bewegungsgleichungen. Die Fluidgleichungen werden in den meisten Fällen in einer Eulerschen Betrachtungsweise formuliert (raumfestes Referenzsystem), wohingegen die Strukturgleichungen in einer Lagrangeschen Formulierung beschrieben werden (materielles Referenzsystem, d.h. die Referenzkonfiguration bewegt sich mit der Struktur mit). Eine Lösungsmöglichkeit für dieses Problem, die auch in dieser Arbeit verwendet wird, bietet eine ALE-Formulierung („Arbitrary Lagrangian Eulerian“) der Fluidgleichungen. Bei einer ALE-Formulierung werden die Fluidgleichungen in einem sich „beliebig“ bewegendem Referenzsystem beschrieben [DGH82].

1.2 Numerische Lösung mit partitionierten Verfahren

Eine analytische Lösung der Fluid-Struktur Interaktionsprobleme ist aufgrund der auftretenden Komplexität nur sehr selten möglich. Daher müssen numerische Verfahren zur Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur eingesetzt werden. Dazu sind als erstes die partiellen Differentialgleichungen, die die Fluid- und Strukturdynamik beschreiben, räumlich und zeitlich zu diskretisieren. Wir verwenden in dieser Arbeit sowohl für das Fluid als auch für die Struktur zur Diskretisierung im Raum Finite Elemente Methoden. Für die Zeitintegration der durch die räumliche Diskretisierung entstehenden Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen setzen wir verschiedene Einschrittverfahren ein. Zur numerischen Lösung des gesamten gekoppelten Systems bieten sich im wesentlichen zwei Möglichkeiten an: Bei der ersten werden die nach der räumlichen Diskretisierung entstandenen Differentialgleichungssysteme der Teilprobleme in einem großen System zusammengefasst, und dieses wird anschließend mit einem geeigneten Zeitschrittverfahren integriert (vgl. Abbildung 1.3). Das dabei in jedem Zeitschritt entstehende nichtlineare Gleichungssystem wird durch Newton-Raphson Verfahren oder Varianten davon iterativ gelöst. Diesen Ansatz bezeichnet man als monolithische oder auch simultane Lösung des gekoppelten Problems [Blo98].

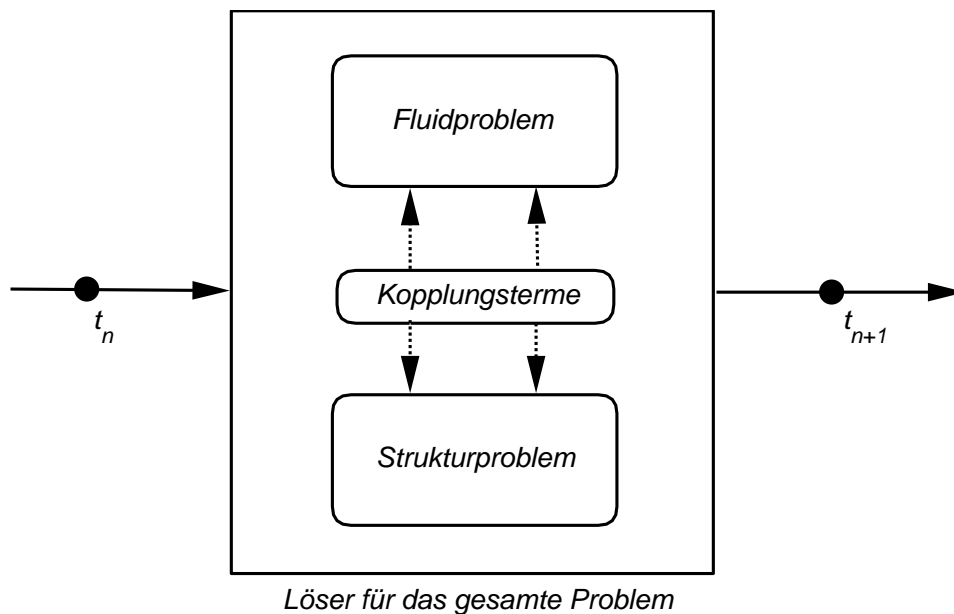


Abbildung 1.3: *Simultane Lösung während eines Zeitschritts*

Diese Vorgehensweise besitzt den Vorteil eines einheitlichen Lösungsansatzes, so daß man

mathematische Aussagen über die Stabilität oder Genauigkeit dieses Verfahrens mit Hilfe von Standardmethoden erhalten kann. Allerdings beinhaltet die simultane Lösung des gekoppelten Problems auch den Nachteil, daß im Gesamtsystem die speziellen Eigenschaften der Teilsysteme (wie Zeitcharakteristiken, Nichtlinearitäten, Konditionszahlen, etc.) nicht berücksichtigt werden. Außerdem muß in den meisten Fällen neue Software zur Berechnung des gesamten Systems entwickelt werden, so daß nur selten auf vorhandene Programme zurückgegriffen werden kann.

Alternativ dazu kann man die raumdiskreten Systeme der Teilprobleme getrennt voneinander mit verschiedenen Zeitschrittverfahren behandeln und die dadurch entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme der Teilprobleme unabhängig voneinander lösen. Dabei müssen die (iterativen) Löser für die diskreten Teilprobleme in jedem Zeitschritt bzw. in jeder Iteration Informationen über die Kopplungsvariablen austauschen (s. Abbildung 1.4). Dieser Lösungsansatz wird als eine modulare Lösung oder auch als partitioniertes Verfahren bezeichnet [PF83], [PFL95]. Partitionierte Verfahren wurden in verschiedenen Varianten unter anderem von [BM78], [HL78], [Par80], [FP80] entwickelt und untersucht und auf zahlreiche Beispiele aus verschiedenen Gebieten angewendet [Zie84], [ZPC88], [FPDP91], [PFL95]. Häufig findet man auch die Bezeichnung „gestaffelte Verfahren“ („*Staggered Methods*“) im Zusammenhang mit partitionierten Verfahren. Wir betrachten die gestaffelten Verfahren hier als einen Spezialfall von partitionierten Verfahren.

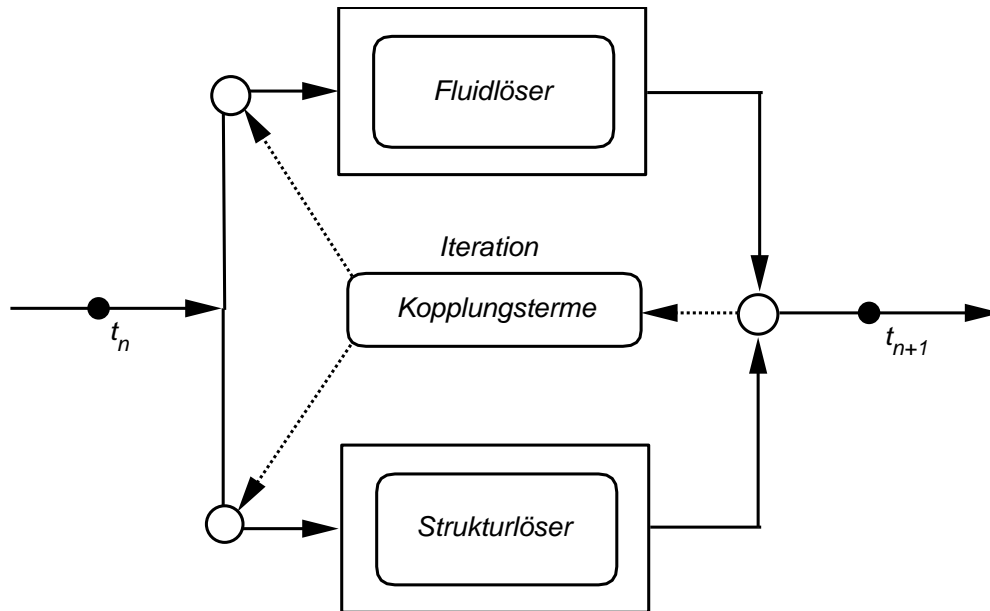


Abbildung 1.4: *Modulare Lösung während eines Zeitschritts (mit äußerer Iteration)*

Partitionierte Verfahren bieten den Vorteil, daß vorhandene Löser bzw. Programme für die

Teilprobleme eingesetzt werden können. So ermöglichen sie die Verwendung von effizienten Diskretisierungs- und Lösungsverfahren für das Fluid- und Strukturproblem. Weiterhin können existierende Programme wiederverwendet werden, so daß Entwicklungszeit und -kosten bei der Entwicklung von neuer Software gespart werden kann. Der Nachteil der partitionierten Verfahren besteht darin, daß spezielle Algorithmen zur Kopplung der Löser für die Teilprobleme entwickelt werden müssen und eine mathematische Untersuchung dieser Kopplungsalgorithmen sehr aufwendig ist [Gra98], [LM01].

Wir werden in dieser Arbeit partitionierte Verfahren zur Berechnung der Fluid-Struktur Interaktion einsetzen und ihre Eigenschaften untersuchen. Die bekanntesten partitionierten Verfahren sind gestaffelte Verfahren („Staggered Methods“) [FP80], [FL00], bei denen das Fluid- und das Strukturproblem in jedem Zeitschritt getrennt voneinander gelöst und jeweils nur einmal pro Zeitschritt die Kopplungsgrößen ausgetauscht werden. Dieses kann entweder am Anfang oder am Ende des Zeitschrittes geschehen. Daher werden die gestaffelten Verfahren auch als schwach gekoppelte Lösungsverfahren bezeichnet, und man kann sie als explizite Verfahren ansehen. Es ist leicht zu erkennen, daß die Kopplungsbedingungen in jedem Zeitschritt durch die gestaffelten Verfahren nicht erfüllt werden. Weiterhin sind die gestaffelten Verfahren nicht absolut stabil und erhalten auch nicht die Energie im Gesamtsystem [Pip97], [ML01]. Aus Stabilitätsgründen werden daher häufig implizite Kopplungsalgorithmen verwendet, in denen die Kopplungsbedingungen (und das sich bewegende Interface) in jedem Zeitschritt implizit behandelt werden [MMV98b], [ML01]. Die impliziten Kopplungsalgorithmen werden auch als stark gekoppelte Lösungsverfahren bezeichnet und lassen sich dadurch realisieren, daß die Löser für die Teilprobleme iterativ miteinander gekoppelt werden. In vielen Fällen werden dazu Block-Jakobi-, Block-Gauß-Seidel- oder mit diesen verwandte Relaxationsverfahren eingesetzt [ML01], [Gra98]. Diese Verfahren haben den Vorteil, daß sie relativ einfach zu implementieren sind. Allerdings erfordern sie in vielen Fällen eine hohe Anzahl von Iterationen zur Konvergenz oder konvergieren überhaupt nicht. Daher werden effizientere stark gekoppelte Lösungsverfahren zur Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur benötigt.

Wir präsentieren in dieser Arbeit einen neuen Lösungsansatz, der auf Block-Newton Verfahren aufbaut [Cha85], [AM95]. Dabei verwenden wir nur die (iterativen) Löser für die Teilprobleme und approximieren mit diesen die partiellen Ableitungen, die bei einem Block-Newton Verfahren benötigt werden. Um das approximative Block-Newton Verfahren anwenden zu können, müssen die iterativen Löser für die Teilprobleme zuerst als eine Fixpunktiteration dargestellt werden. Das approximative Block-Newton Verfahren wird anschließend auf das dadurch entstandene System von Fixpunktgleichungen angewendet. Es kann gezeigt werden, daß das approximative Block-Newton Verfahren die Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften des Block-Newton Verfahrens erhält [MMV99a], so daß diese Verfahren Vorteile gegenüber den einfachen Iterationsverfahren wie Block-Jakobi oder

Block-Gauß-Seidel besitzen. Ein Nachteil des approximativen Block-Newton Verfahrens stellt dagegen der erhöhte numerische Aufwand in jedem Iterations- bzw. Zeitschritt dar.

1.3 Gliederung der Arbeit

Im folgenden wollen wir einen kurzen Überblick über den Inhalt der einzelnen Kapitel geben. Als erstes wird im nächsten Kapitel die mathematische Modellierung der Wechselwirkung von Strömung und Struktur behandelt. Dazu werden die mathematischen Modelle für die Fluidodynamik und die Strukturdynamik hergeleitet, wobei insbesondere auf die ALE-Formulierung der Fluidgleichungen eingegangen wird. Desweiteren werden die Kopplungsbedingungen am Fluid-Struktur Interface beschrieben, so daß am Ende dieses Kapitels das gesamte mathematische Modell für die Fluid-Struktur Interaktion formuliert ist.

Im dritten Kapitel werden die partiellen Differentialgleichungen, die die Fluid- und Strukturdynamik beschreiben, im Raum und in der Zeit diskretisiert. Außerdem wird in diesem Kapitel die raumdiskrete Form der Kopplungsbedingungen untersucht. Hierbei wird detailliert auf die Probleme eingegangen, die bei dem Einsatz von partitionierten Verfahren entstehen können. Da bei der räumlichen Diskretisierung der Fluid- und Strukturgleichungen verschiedene Gitter in den Teilproblemen erzeugt werden können, müssen spezielle Techniken für den Geometrie- und Lasttransfer entwickelt werden [FLL98], [CL97]. Ein weiteres Problem ergibt sich durch die Verformung des Fluidnetzes, für die ein Netzbebewegungsalgorithmus vorgeschlagen wird [LF96]. Abgeschlossen wird das dritte Kapitel durch eine abstrakte Formulierung des diskreten gekoppelten Problems und eine kurze Beschreibung der iterativen Löser für das diskrete Fluid- und Strukturproblem.

Das vierte Kapitel beinhaltet eine ausführliche Vorstellung der Kopplungsalgorithmen, die bei partitionierten Verfahren zu entwickeln sind. Der Schwerpunkt liegt hierbei in der zeitlichen Diskretisierung der Kopplungsbedingungen. Dabei wird mit den schwach gekoppelten Lösungsverfahren begonnen, zu denen die gestaffelten Verfahren gehören, und für diese mehrere Verbesserungsmöglichkeiten vorgeschlagen. Desweiteren werden parallele Varianten der gestaffelten Verfahren betrachtet, die den Einsatz von Parallelrechnern ermöglichen. Anschließend werden verschiedene, stark gekoppelte Algorithmen behandelt, die aus einfachen Iterationsverfahren (Block-Gauß-Seidel, Relaxation) aufgebaut sind. Für diese stark gekoppelten Verfahren werden verschiedene Konvergenz- bzw. Stabilitätsaussagen hergeleitet. Als letztes wird das approximative Block-Newton Verfahren vorgestellt und die verschiedenen Schritte dieses Algorithmus erläutert. Insbesondere wird der numerische Aufwand für die stark gekoppelten Verfahren miteinander verglichen. Die Eigenschaften der verschiedenen Kopplungsalgorithmen werden anhand eines eindimensionalen Modellproblems untersucht.

Im fünften Kapitel betrachten wir die Software-Aspekte der Kopplung von separaten Anwendungsprogrammen. Dazu werden als erstes die Anforderungen an ein Kopplungsinterface dargestellt und anhand einer Realisierung, der Kopplungsbibliothek GRISSLi, verdeutlicht. Desweiteren wird darauf eingegangen, wie sich die im vierten Kapitel vorgestellten Kopplungsalgorithmen in GRISSLi realisieren lassen.

Anschließend werden im sechsten Kapitel verschiedene zweidimensionale Beispiele für die Interaktion von Fluid und Struktur berechnet. Dabei werden die im vierten Kapitel vorgestellten gestaffelten Verfahren und die entwickelten stark gekoppelten Lösungsverfahren angewendet und insbesondere die Effizienz der vorgestellten Kopplungsalgorithmen miteinander verglichen.

Zum Ende dieser Arbeit werden wir im letzten Kapitel noch einmal die wesentlichen Ergebnisse zusammenfassen und diskutieren. Außerdem wollen wir einen Ausblick vornehmen, welche Aufgaben für eine effiziente Berechnung der Fluid-Struktur Interaktion mit partitionierten Verfahren in Zukunft noch gelöst bzw. untersucht werden können.

Der Anhang enthält zum einen eine detaillierte Beschreibung des eindimensionalen Modellbeispiels, das zur Veranschaulichung der Kopplungsalgorithmen im vierten Kapitel verwendet wurde, und zum anderen eine kurze Einführung in die Programme, die zur Berechnung der Fluid- bzw. Strukturdynamik eingesetzt wurden.

Kapitel 2

Mathematische Modellierung von Fluid-Struktur Wechselwirkung

Im vorhergehenden Kapitel wurden viele unterschiedliche Probleme der Wechselwirkung von Fluid und Struktur präsentiert. In diesem Kapitel wird erläutert, welche Klasse von Problemen hier untersucht werden soll. Dazu werden die jeweiligen Modelle der Fluid- und Strukturmechanik vorgestellt und die Kopplungsbedingungen formuliert, die am Rand von Fluid und Struktur erfüllt sein müssen. Für die Strömung wählen wir als Modell die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen für ein viskoses Fluid und für die elastische Struktur das Modell einer geometrisch nichtlinearen und materiell linearen Elastizitätstheorie. Damit erhalten wir ein realistisches Modell für die Wechselwirkung von Fluid und Struktur, in dem die Komplexität dieser Probleme vollständig enthalten ist. Es soll allerdings noch einmal betont werden, daß in dieser Arbeit die Entwicklung von effizienten Algorithmen für die Kopplung von Fluid- und Strukturlösern im Vordergrund steht und nicht die Berechnung von realitätsnahen Beispielen.

Die Bewegungsgleichungen für die Strömung und die Struktur werden im allgemeinen in unterschiedlichen Betrachtungsweisen formuliert. Bei der Eulerschen oder räumlichen Betrachtungsweise betrachtet der Beobachter feste Raumpunkte und bilanziert die Eigenschaften der materiellen Punkte, die im Verlauf der Zeit diesen Ort einnehmen. Ein Vorteil dieser Betrachtungsweise ist, daß große Deformationen ohne Verlust an Genauigkeit beschrieben werden können, ein Nachteil ist, daß die materiellen Punkte (Schnittstellen) ihre klare Definition verlieren. Bei der Lagrangeschen oder materiellen Betrachtungsweise verfolgt der Beobachter jeden einzelnen materiellen Punkt auf seiner Bahn durch den Raum (Bahnlinie) und mißt dabei die Veränderungen der jeweiligen Eigenschaften. Diese Betrachtungsweise bietet den Vorteil, daß die Schnittstellen klar definiert sind und damit bewegliche Ränder einfacher zu beschreiben sind. Sie beinhaltet andererseits auch den Nachteil, daß große Deformationen nicht oder nur mit sehr hohem Aufwand beschrieben werden können. Meistens werden die Fluidgleichungen in der Eulerschen Betrachtungs-

weise formuliert, wohingegen die Strukturgleichungen fast immer in der Lagrangeschen Betrachtungsweise gegeben sind. Dieses führt dann zu einem Problem, wenn sich das Strömungsgebiet in der Zeit ändert und die materiellen Punkte des Randes sich verschieben. Eine Lösung für dieses Problem liefert eine ALE-Formulierung („Arbitrary Lagrangian Eulerian“) der Strömungsgleichungen, bei der die Fluidgleichungen in einem sich beliebig bewegenden Referenzsystem formuliert werden. Dieses bedeutet, daß sich der Beobachter beliebig durch den Raum bewegen kann. Das Referenzsystem für die ALE-Formulierung wird daher im folgenden auch häufig als räumliches Referenzsystem bezeichnet. Diese Formulierung wird im nächsten Abschnitt genauer beschrieben.

2.1 Das Modell der Strömungsmechanik

Für die Strömungsmechanik kann man aus einer Vielzahl von Modellen auswählen, die bestimmte Eigenschaften des Fluides beinhalten und unterschiedliche Komplexitäten aufweisen. Charakteristische Eigenschaften eines Fluides sind zum Beispiel die Viskosität und die Kompressibilität. Die Viskosität eines Fluides verursacht Reibungskräfte, die auf das Fluid einwirken und dafür sorgen, daß sich bewegende Fluide auch ohne Einwirkung äußerer Kräfte zur Ruhe kommen. Bei zähen oder viskosen Fluiden wie zum Beispiel Honig oder auch Blut ist die Reibungskraft dabei wesentlich größer als bei weniger viskosen Fluiden wie Wasser oder Luft. Bei vielen Problemen der Gasdynamik wird die durch die Viskosität entstehende Reibungskraft im Gas ganz vernachlässigt, so daß man dann von nicht-viskosen Fluiden („inviscid fluid“) spricht. Das Verhalten von nicht-viskosen Fluiden in der Gasdynamik wird durch die Euler-Gleichungen beschrieben. Wenn man die inneren Reibungskräfte im Fluid nicht vernachlässigt, so werden bei Newtonschen Fluiden die Strömungsgleichungen durch die Navier-Stokes Gleichungen gegeben.

Eine weitere Eigenschaft eines Fluides ist, ob es als kompressibel oder inkompressibel modelliert werden kann. Kompressibilität bedeutet, daß das Fluid zusammengedrückt werden kann. Die gleiche Masse Fluid muß also nicht immer das gleiche Volumen einnehmen und das Volumen hängt vom Druck ab. Beispiele für kompressible Fluide sind Gase wie Luft bei hohen Geschwindigkeiten. Die meisten Flüssigkeiten (Wasser, Blut, etc.) können dagegen näherungsweise als inkompressibel betrachtet werden. Die Dichte des Fluides wird daher in diesen Fällen als konstant angenommen.

Wir wählen hier als Modell der Strömungsmechanik die Navier-Stokes Gleichungen für ein inkompressibles Fluid. Weiter betrachten wir nur laminare und keine turbulenten Strömungen, für die zusätzlich Turbulenzmodelle aufgestellt werden müssen und die eine erhöhte Komplexität bedeuten. Die Bewegungsgleichungen für eine Strömung werden in den meisten Fällen in der Eulerschen Betrachtungsweise formuliert, da hier Informationen über die Geschwindigkeiten und Drücke an bestimmten Punkten benötigt werden und es

im allgemeinen weniger interessiert, woher ein bestimmtes Teilchen kommt und wohin es fließt. Im ersten Teilabschnitt wird davon ausgegangen, daß sich das Strömungsgebiet nicht verändert. Wenn sich die Ränder des Strömungsgebietes zeitlich ändern, und dieses tritt bei der Interaktion von Fluid und Struktur natürlicherweise auf, so ergeben sich bei der Eulerschen Betrachtungsweise Probleme mit einer klaren Definition der beweglichen Ränder. Daher wählt man in diesem Fall eine ALE-Formulierung der Fluidgleichungen, die im zweiten Teilabschnitt eingeführt wird.

2.1.1 Die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

Die charakteristischen Größen einer Strömung in einem Gebiet $\Omega_f \subset \mathbb{R}^N$ mit $N = 2$ oder $N = 3$ und in der Zeit $[0, T]$ sind

- das Geschwindigkeitsfeld $v : [0, T] \times \Omega_f \longrightarrow \mathbb{R}^N$,
- der Druck $p : [0, T] \times \Omega_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und
- die Dichte $\rho : [0, T] \times \Omega_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Die Dichte ρ und der Druck p sind Skalare, die Geschwindigkeit v eine vektorielle Größe. Die partiellen Differentialgleichungen, die die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen beschreiben, erhält man aus den entsprechenden Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls [FP96], [Fle91a]. Für ein inkompressibles Fluid ist die Dichte in Raum und Zeit konstant: es gilt $\rho(t, x) = \rho_f$. Daher erhält man aus der Massenerhaltung im System die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = \rho_f \operatorname{div} v = 0. \quad (2.1)$$

Aus der Impulserhaltung im System folgt die partielle Differentialgleichung

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_f (v \cdot \operatorname{grad}) v = \operatorname{div} \sigma_f + g \quad (2.2)$$

mit dem Spannungstensor σ_f und den äußeren Kräften g , die auf das Fluid einwirken (z.B. durch Gravitation). Um das mathematische Modell für die Strömung zu vervollständigen, muß der Spannungstensor σ_f definiert werden. Wenn ein viskoses Fluid modelliert werden soll, so müssen die inneren Reibungskräfte in dem Spannungstensor berücksichtigt werden. Bei Newtonschen Fluiden ergibt sich daher für den Spannungstensor

$$\sigma_f = -pI + \tau = -pI + 2\nu D. \quad (2.3)$$

Dabei ist τ der viskose Anteil des Spannungstensors, ν die dynamische Viskosität des Fluides und D der Verzerrungs-Geschwindigkeitstensor, der durch

$$D = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} v + (\operatorname{grad} v)^t) \quad (2.4)$$

bzw. komponentenweise durch

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

gegeben ist. Damit erhält man für die Impulsgleichung (2.2) durch Umformung der rechten Seite

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_f (v \cdot \text{grad}) v + \text{grad } p = \nu \Delta v + g. \quad (2.6)$$

Die Navier-Stokes Gleichungen für ein viskoses und inkompressibles Fluid in dem Gebiet Ω_f werden also durch das folgende System partieller Differentialgleichungen beschrieben:

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_f (v \cdot \text{grad}) v + \text{grad } p = \nu \Delta v + g \quad \text{in } \Omega_f \times [0, T], \quad (2.7)$$

$$\text{div } v = 0 \quad \text{in } \Omega_f \times [0, T]. \quad (2.8)$$

Zusätzlich zu den Differentialgleichungen werden Anfangs- und Randbedingungen für die Geschwindigkeiten oder die Spannungen gefordert. Als Anfangsbedingung wird

$$v(0, x) = v_0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega_f \quad (2.9)$$

gesetzt, wobei v_0 der Kontinuitätsgleichung (2.8) genügen muß. Auf dem Rand von Ω_f können verschiedene Randbedingungen vorgegeben sein. Dazu zerlegen wir den Rand Γ_f des Fluidgebietes Ω_f in zwei disjunkte Randstücke $\Gamma_{f,1}$ und $\Gamma_{f,2}$. Auf $\Gamma_{f,1}$ werden Dirichlet-Randbedingungen für die Geschwindigkeiten

$$v = v_r \text{ auf } \Gamma_{f,1}, \quad (2.10)$$

und auf $\Gamma_{f,2}$ werden Randlasten vorgeschrieben:

$$\sigma_f \cdot n = \tau_f \text{ auf } \Gamma_{f,2}. \quad (2.11)$$

Im folgenden soll die schwache Form der Navier-Stokes Gleichungen (2.7) und (2.8) hergeleitet werden (vgl. [FP96]) Dazu werden durch

$$\mathcal{Q}^f = \{ \hat{q} : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{R} \mid \hat{q} \in L_2(\Omega_f) \}, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{V}^f = \{ \hat{v} : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{v} \in H^1(\Omega_f), \hat{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_{f,1} \}, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{V} = \{ v : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid v \in H^1(\Omega_f), v = v_r \text{ auf } \Gamma_{f,1} \} \quad (2.14)$$

die Räume der Testfunktionen bzw. Lösungen definiert. $L_2(\Omega_f)$ bezeichnet dabei den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω_f und $H^1(\Omega_f)$ den Sobolev-Raum der Funktionen mit quadratintegrierbaren Werten und ersten Ableitungen auf Ω_f . Die Variationsformulierung erhält man, indem man die partiellen Differentialgleichungen in (2.7)

und (2.8) mit den entsprechenden Testfunktionen multipliziert und über das Fluidgebiet Ω_f integriert:

$$\int_{\Omega_f} \left(\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_f (v \cdot \text{grad}) v - \text{div } \sigma_f \right) \cdot \hat{v} \, dx = \int_{\Omega_f} g \cdot \hat{v} \, dx \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{V}^f \quad (2.15)$$

und

$$\int_{\Omega_f} \hat{q} \, \text{div } v \, dx = 0 \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}^f. \quad (2.16)$$

Durch partielle Integration (Integralsatz von Green) läßt sich die Variationsform der Impulsgleichung (2.15) in

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \left(\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} \right) \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Omega_f} \rho_f (v \cdot \text{grad}) v \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Omega_f} \sigma_f : \text{grad } \hat{v} \, dx \\ = \int_{\Omega_f} g \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Gamma_{f,2}} \tau_f \cdot \hat{v} \, ds \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{V}^f \end{aligned} \quad (2.17)$$

umformen. Hierbei sind τ_f die Randspannungen, die auf dem Randstück $\Gamma_{f,2}$ vorgegeben sind. Gesucht wird also eine Lösung $(v, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}^f$ der Variationsform (2.16) und (2.17). Die schwache Form (2.16) und (2.17) bildet im nächsten Abschnitt die Grundlage für eine ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen.

2.1.2 ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen

Wir wollen uns jetzt dem Problem zuwenden, daß sich das Strömungsgebiet Ω_f zeitlich ändern und sich der Rand des Gebietes Ω_f bewegen kann. Wir betrachten also die Navier-Stokes Gleichungen (2.7) und (2.8) in dem zeitabhängigen Gebiet $\Omega_f(t)$. Dabei gehen wir davon aus, daß sich ein Teil Γ des Randes Γ_f mit der Geschwindigkeit v_g bewegt.

Bei einer Eulerschen Betrachtungsweise der Strömungsgleichungen wird ein festes Referenzsystem verwendet, wodurch der sich bewegende Rand nicht sehr gut dargestellt werden kann, allerdings große Deformationen gut abgebildet werden können. Bei einer Lagrange-schen Formulierung bewegt sich das Referenzsystem mit der Fluidgeschwindigkeit mit, so daß eine Definition des beweglichen Randes kein Problem darstellt. Dafür verursacht die Beschreibung der großen Deformationen, die häufig die zu untersuchenden Strömungen charakterisieren, große Probleme.

Um die Vorteile beider Betrachtungsweisen zu kombinieren, wählt man eine gemischte Formulierung, die auch als ALE-Formulierung („Arbitrary Lagrangian Eulerian“) bezeichnet wird [Don83], [HLZ81]. Die ALE-Formulierung besteht aus der Definition eines eigenen, beliebig bewegten Referenzsystems, das sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit w bewegt (vgl. Abbildung 2.1). Wir bezeichnen diese räumliche Referenzkonfiguration hier mit Ω_0 . Abhängig vom Wert der Geschwindigkeit w können drei Fälle unterschieden werden:

1. $w = 0$: Das Referenzsystem ist fest im Raum fixiert. Dieses entspricht der Eulerschen Betrachtungsweise: die Bewegungsgleichungen werden in Abhängigkeit der räumlichen Koordinaten x beschrieben. Ein Partikel wird durch seine Position x (fest im Raum) zur Zeit t beschrieben (s. Abbildung 2.1).
2. $w = v \neq 0$: v ist die Geschwindigkeit der Partikel im Fluid. Das Referenzsystem bewegt sich also mit derselben Geschwindigkeit wie die Fluidpartikel. Dieses korrespondiert mit der Lagrangeschen Betrachtungsweise, bei der die Bewegung in Abhängigkeit von den materiellen Koordinaten beschrieben wird.
3. $w \neq v \neq 0$: Das Referenzsystem bewegt sich mit einer von der Partikelgeschwindigkeit v und von 0 verschiedenen Geschwindigkeit w im Raum. Jeder Raumpunkt ist durch seine Koordinaten ξ in der Referenzkonfiguration bestimmt (vgl. Abbildung 2.1).

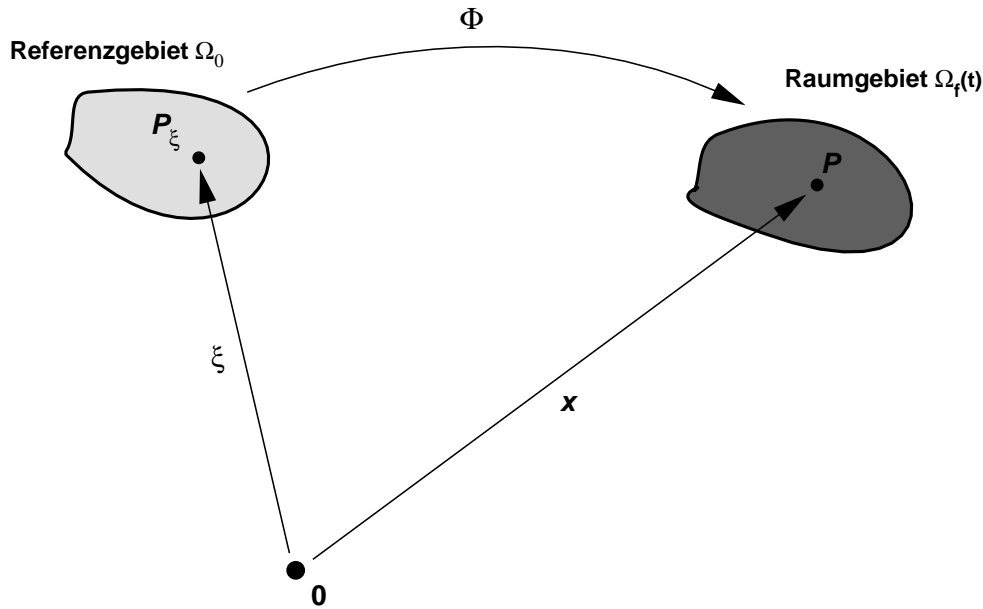


Abbildung 2.1: Verschiedene Koordinatensysteme bei der ALE-Formulierung

Die ALE-Formulierung kann daher als eine Transformation der Referenzkonfiguration Ω_0 in den momentanen Zustand des Fluidgebietes $\Omega_f(t)$ verstanden werden. Die Wahl der Referenzkonfiguration Ω_0 ist dabei beliebig. Die Transformation wird durch eine Abbildung

$$\Phi : [0, T] \times \Omega_0 \longrightarrow \Omega_f(t), \quad (t, \xi) \longmapsto x = \Phi(t, \xi) \quad (2.18)$$

gegeben, die invertierbar und hinreichend glatt ist. Eine Forderung, die Φ erfüllen muß, ist eine gute Repräsentation der aktuellen Geometrie von $\Omega_f(t)$. Außerdem muß Φ die Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \xi) = v_g(t, \Phi(t, \xi)) \quad (2.19)$$

für alle $\xi \in \Gamma_0$ erfüllen, damit die Geschwindigkeiten am sich bewegenden Rand Γ übereinstimmen. Γ_0 ist dabei die Referenzkonfiguration des sich bewegenden Randes Γ . Ansonsten ist die Wahl der Transformation Φ ebenfalls beliebig. Für die ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen werden weiter die Größen

$$\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad J = \det \Psi = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|$$

eingeführt. Als nächstes soll die schwache Form der Navier-Stokes Gleichungen in dem Referenzsystem Ω_0 formuliert werden. Dazu müssen die Integrale in (2.16) und (2.17) auf die Referenzkonfiguration Ω_0 transformiert werden. Die Räume der Testfunktionen werden bei der ALE-Formulierung daher durch

$$\mathcal{Q}_0^f = \{ \hat{q} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \hat{q} \in L_2(\Omega_0) \}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{V}_0^f = \{ \hat{v} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{v} \in H^1(\Omega_0), \hat{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_0, \hat{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_{f,1} \}, \quad (2.21)$$

und der Lösungsraum für die Geschwindigkeiten durch

$$\mathcal{V}_0 = \{ v : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid v \in H^1(\Omega_0), v = v_g \text{ auf } \Gamma_0, v = v_r \text{ auf } \Gamma_{f,1} \} \quad (2.22)$$

definiert. $\Gamma_{f,1}$ ist der feste Rand des Strömungsgebietes, auf dem die Randgeschwindigkeiten v_r vorgegeben sind. Die schwache Form der Navier-Stokes Gleichungen in der Referenzkonfiguration Ω_0 lautet dann

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left(\rho_f \frac{J \partial v}{\partial t} \Big|_{\xi} \right) \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Omega_0} (\rho_f (J v \cdot \Psi^{-t} - \dot{x}) \cdot \text{grad}_{\xi} (J v \cdot \Psi^{-t})) \cdot \hat{v} \, dx \\ & + \int_{\Omega_0} (J \sigma_f \cdot \Psi^{-t}) : \text{grad}_{\xi} \hat{v} \, dx = \int_{\Omega_0} g \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Gamma_{f,2}} \tau_f \cdot \hat{v} \, ds \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{V}_0^f \end{aligned} \quad (2.23)$$

und

$$\int_{\Omega_0} \hat{q} \, \text{div}_{\xi} (J v \cdot \Psi^{-t}) \, dx = 0 \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}_0^f. \quad (2.24)$$

Hierbei bezeichnet \dot{x} die Geschwindigkeit des Referenzsystems, d.h.

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\xi} \quad \text{in } \Omega_0, \quad \dot{x} = v_g \text{ auf } \Gamma_0, \quad (2.25)$$

die in der Literatur auch häufig als Netz- oder Gittergeschwindigkeit bezeichnet wird. Die Zeitableitung $\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\xi}$ bedeutet, daß diese in der Referenzkonfiguration Ω_0 gebildet wird; für

die räumlichen Ableitungen grad_ξ und div_ξ gilt dieses analog. In vielen Fällen werden die Integrale in (2.23) und (2.24) in der aktuellen Fluidkonfiguration $\Omega_f(t)$ berechnet, da die Auswertung dieser Integrale dort einfacher ist. Die Zeitableitung wird allerdings weiterhin im Referenzsystem Ω_0 gebildet. Damit erhält man für die Variationsform (2.23) durch eine Rücktransformation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f(t)} \left(\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_\xi \right) \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Omega_f(t)} (\rho_f (v - \dot{x}) \cdot \text{grad } v) \cdot \hat{v} \, dx \\ & + \int_{\Omega_f(t)} \sigma_f : \text{grad } \hat{v} \, dx = \int_{\Omega_f(t)} g \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Gamma_{f,2}} \tau_f \cdot \hat{v} \, ds \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{V}_0^f. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Variationsform (2.26) kann dann kurz als

$$\mathcal{M}_f(v, \hat{v}) + \mathcal{N}_f(v - \dot{x}, v, \hat{v}) + \mathcal{B}_f(p, \hat{v}) + \mathcal{K}_f(v, \hat{v}) = \mathcal{G}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{V}_0^f \quad (2.27)$$

geschrieben werden, wobei \mathcal{M}_f , \mathcal{N}_f , \mathcal{B}_f , \mathcal{K}_f und \mathcal{G} durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f(v, \hat{v}) &= \int_{\Omega_f(t)} \left(\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_\xi \right) \cdot \hat{v} \, dx, \\ \mathcal{N}_f(v - \dot{x}, v, \hat{v}) &= \int_{\Omega_f(t)} (\rho_f (v - \dot{x}) \cdot \text{grad } v) \cdot \hat{v} \, dx, \\ \mathcal{B}_f(p, \hat{v}) &= \int_{\Omega_f(t)} p \, \text{div } \hat{v} \, dx, \\ \mathcal{K}_f(v, \hat{v}) &= \nu \int_{\Omega_f(t)} \text{grad } v : \text{grad } \hat{v} \, dx, \\ \mathcal{G}(\hat{v}) &= \int_{\Omega_f(t)} g \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Gamma_{f,2}} \tau_f \cdot \hat{v} \, ds \end{aligned}$$

definiert werden. Hierbei wurde die Definition des Spannungstensors σ_f eingesetzt und dessen Bestandteile entsprechend in \mathcal{B}_f und \mathcal{K}_f aufgeteilt. Die Variationsform der Kontinuitätsgleichung (2.24) wird durch

$$\mathcal{B}_f(\hat{q}, v) = 0 \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}_0^f \quad (2.28)$$

gegeben. Ausgehend von den Variationsgleichungen (2.27) und (2.28) wird im nächsten Kapitel eine Finite Elemente Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen vorgenommen.

2.2 Das Modell der Strukturmechanik

Für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung müssen die Strukturgleichungen so formuliert werden, daß große Verformungen der Struktur möglich sind. Wir setzen dabei im

folgenden nur kleine Verzerrungen und elastische Verformungen der Struktur voraus. Aus diesem Grund wählen wir hier die Bewegungsgleichungen einer geometrisch nichtlinearen und materiell linearen Elastodynamik als Modell für die Strukturmechanik, die wir in einer (totalen) Lagrangeschen Formulierung darstellen werden (vgl. [Wri01]).

Sei Ω_s das materielle Referenzgebiet für den zu betrachtenden elastischen Festkörper. Die Verschiebungen u werden durch die Differenz der Koordinaten eines materiellen Punktes zwischen der deformierten Momentankonfiguration (entspricht dem Raumgebiet) und der unverformten Referenzkonfiguration (entspricht dem Materialgebiet Ω_s) gegeben. Die Bewegungsgleichungen für einen elastischen Körper lassen sich aus dem Gleichgewicht der Oberflächen-, Volumen- und Trägheitskräfte herleiten und lauten in dem materiellen Referenzgebiet Ω_s und in dem Zeitintervall $[0, T]$:

$$\rho_s \ddot{u} - \operatorname{div}_0 S = f \quad \text{in } \Omega_s \times [0, T]. \quad (2.29)$$

Hierbei bezeichnen ρ_s die Dichte des Körpers, \ddot{u} die zweiten Ableitungen der Verschiebungen nach der Zeit (also die Beschleunigungen), f die angreifenden Volumenkräfte und S die Spannungen in dem Körper. Der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor S der Struktur wird für ein homogenes und isotropes Material durch die Konstitutivgleichungen des Saint-Venant-Kirchhoff-Materials in der Form

$$S = \lambda(\operatorname{tr} E)I + 2\mu E \quad (2.30)$$

mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor E und den Lamé-Konstanten λ und μ definiert. Aufgrund der Beschränkung auf isotrope, linear-elastische Materialien eignet sich dieses Materialmodell nur für kleine Verzerrungen. Der symmetrische Green-Lagrangesche Verzerrungstensor E wird durch

$$E = \frac{1}{2} (F^t \cdot F - I) \quad (2.31)$$

definiert, wobei F der unsymmetrische materielle Deformationsgradient ist. F ist als lineare Abbildung eines Linienelements $d\xi$ der Referenzkonfiguration (Materialgebiet) auf ein Linienelement dy der Momentankonfiguration (Raumgebiet) definiert:

$$dy = F \cdot d\xi \quad \text{bzw.} \quad F_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j}. \quad (2.32)$$

Wenn ein kartesisches Koordinatensystem verwendet wird, dann kann der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor E mit Hilfe der Verschiebungen u durch die nichtlineare Beziehung zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen als

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) \quad (2.33)$$

dargestellt werden. Aufgrund der vollständig nichtlinearen Beziehung zwischen dem Verzerrungstensor und den Verschiebungen können damit große Verformungen der Struktur beschrieben werden. Mit Hilfe des materiellen Deformationsgradienten F kann auch der Zusammenhang des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors S , dessen Bezugssystem in der materiellen Referenzkonfiguration liegt, und dem Cauchyschen Spannungstensor σ_s mit dem Bezugssystem in der aktuellen Konfiguration des Körpers hergestellt werden. Der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor S kann durch die Operation

$$\sigma_s = \frac{1}{\det F} F \cdot S \cdot F^t \quad (2.34)$$

in den Cauchyschen Spannungstensor σ_s transformiert werden. Diese Transformation wird insbesondere bei der Formulierung der dynamischen Kopplungsbedingungen im nächsten Abschnitt benötigt, da dort der Cauchysche Spannungstensor verwendet wird.

Zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen werden noch Anfangs- und Randbedingungen benötigt. Die Anfangsbedingungen werden für die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten formuliert. Als Anfangsbedingungen können z.B.

$$u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \xi) = w_0(\xi) \quad \text{für } \xi \in \Omega_s \quad (2.35)$$

gesetzt werden. Für die Definition der Randbedingungen wird der Rand $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ in zwei disjunkte Randstücke $\Gamma_{s,1}$ und $\Gamma_{s,2}$ aufgeteilt. Es können dann Oberflächenverschiebungen auf $\Gamma_{s,1}$

$$u = u_r \quad \text{auf } \Gamma_{s,1} \quad (2.36)$$

und Oberflächenkräfte auf $\Gamma_{s,2}$

$$S \cdot n = \tilde{S} \quad \text{auf } \Gamma_{s,2} \quad (2.37)$$

vorgegeben sein.

Im folgenden sollen die partiellen Differentialgleichungen (2.29) der geometrisch nichtlinearen und materiell linearen Elastodynamik in einer schwachen Form dargestellt werden. Dazu wird

$$\mathcal{V}^s = \{\hat{u} : \Omega_s \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{u} \in H^1(\Omega_s), \hat{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_{s,1}\} \quad (2.38)$$

als der Raum der Testfunktionen gewählt. Die Variationsform der Strukturgleichungen (2.29) lautet dann

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} \cdot \hat{u} \, dx - \int_{\Omega_s} (\operatorname{div}_0 S) \cdot \hat{u} \, dx = \int_{\Omega_s} f \cdot \hat{u} \, dx \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}^s. \quad (2.39)$$

Durch Anwendung des Greenschen Integralsatzes (partielle Integration) lässt sich (2.39) umformen in

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\Omega_s} S : \operatorname{grad}_0 \hat{u} \, dx = \int_{\Omega_s} f \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\Gamma_{s,2}} \tilde{S} \cdot \hat{u} \, ds \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}^s, \quad (2.40)$$

wobei $\tilde{S} = S \cdot n$ die entsprechenden Komponenten aus den Randbedingungen (2.37) für die Spannungen am Rand $\Gamma_{s,2}$ sind. Die Variationsform (2.40) kann dann kurz als

$$\mathcal{M}_s(u, \hat{u}) + \mathcal{K}_s(u, \hat{u}) = \mathcal{F}(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}^s \quad (2.41)$$

geschrieben werden, wobei in

$$\mathcal{M}_s(u, \hat{u}) = \int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{u} \cdot \hat{u} \, dx$$

die Trägheitsterme enthalten sind, in

$$\mathcal{K}_s(u, \hat{u}) = \int_{\Omega_s} S : \text{grad}_0 \hat{u} \, dx$$

die nichtlinearen Anteile zusammengefasst werden, und durch

$$\mathcal{F}(\hat{u}) = \int_{\Omega_s} f \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\Gamma_{s,2}} \tilde{S} \cdot \hat{u} \, ds$$

die externen Einflüsse beschrieben werden. Die Variationsform (2.41) entspricht dem Prinzip der virtuellen Arbeit und bildet die Ausgangssituation für eine Diskretisierung mit Finiten Elementen, die im nächsten Kapitel dargestellt wird.

2.3 Die Kopplungsbedingungen am Rand von Fluid und Struktur

Wir wollen jetzt die Kopplungsbedingungen herleiten, wenn die Wechselwirkung von Fluid und Struktur untersucht werden soll. Dazu gehen wir davon aus, daß sich die elastische Struktur vollkommen oder zumindestens teilweise in dem Strömungsgebiet befindet. Bei der Formulierung der Kopplungsbedingungen auf dem Rand von Fluid und Struktur muß darauf geachtet werden, ob eine Lagrangesche oder Eulersche Betrachtungsweise verwendet wird. Wir werden hier die kinematischen Kopplungsbedingungen in einer Lagrangeschen und die dynamischen Kontaktbedingungen in einer Eulerschen Formulierung angeben. Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ muß natürlich eine Kompatibilität der jeweiligen Geometrien von Fluid und Struktur gegeben sein, damit zwischen Fluid- und Strukturgebiet keine Löcher entstehen können. Dieser Zusammenhang läßt sich in Lagrangescher Betrachtungsweise durch

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \xi \in \Gamma_0 : \xi + u(t, \xi) \in \Gamma$$

bzw. in Eulerscher Betrachtungsweise durch

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall y \in \Gamma \quad \exists \xi \in \Gamma_0 : \xi + u(t, \xi) = y$$

ausdrücken. Hierbei bezeichnet Γ_0 die Referenzkonfiguration des sich bewegenden Randes in dem Referenzgebiet Ω_0 , und Γ ist der sich bewegende Fluidrand in dem aktuellen Fluidgebiet $\Omega_f(t)$. Am Rand von Fluid und Struktur müssen weiterhin die folgenden kinematischen und dynamischen Kopplungsbedingungen erfüllt sein:

1. Die Geschwindigkeiten am Rand müssen gleich sein:

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \xi \in \Gamma_0 : v(t, \xi + u(t, \xi)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) . \quad (2.42)$$

Diese Bedingung gilt für ein viskoses Fluid. Im Fall eines nicht-viskosen Fluides wird die Kontinuität der normalen Komponenten der Randgeschwindigkeiten gefordert.

2. Am Interface muß ein Kräftegleichgewicht vorhanden sein. Dieses bedeutet, daß die Spannungsvektoren am Rand gleich sein müssen (n ist wieder die Normale zum Strukturrand):

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall y \in \Gamma : \sigma_f(t, y) \cdot n = \sigma_s(t, y) \cdot n, \quad (2.43)$$

wobei σ_s der Cauchysche Spannungstensor (2.34) in der Momentankonfiguration der Struktur ist und n die Normale zum Strukturrand bezeichnet. Diese Kopplungsbedingungen werden in die Teilmodelle Fluid und Struktur integriert. In den meisten Fällen wird die Strömung mit den kinematischen Randbedingungen (2.42), also Dirichlet-Randbedingungen für die Geschwindigkeiten, und die Struktur mit den dynamischen Kontaktbedingungen (2.43), d.h. Neumann-Randbedingungen für die Spannungen, berechnet. Dazu muß der Cauchysche Spannungstensor σ_s in (2.43) in den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor S transformiert werden. Diese Vorgehensweise wird auch in dieser Arbeit angewendet.

Kapitel 3

Diskretisierung von Fluid- und Strukturdynamik

In diesem Kapitel wollen wir die Diskretisierung der Fluid- und Strukturgleichungen vornehmen, die im vorhergehenden Abschnitt hergeleitet wurden. Dabei trennen wir die räumliche und zeitliche Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen voneinander und diskretisieren die Differentialgleichungen zuerst im Raum mit Finiten Elementen und dann in der Zeit mit Finiten Differenzen („Linienmethode“). Eine Alternative dazu wäre die Verwendung von Raum-Zeit Finiten Elementen [HH88], [MH97], bei der sowohl Raum als auch Zeit zusammen mit Finiten Elementen diskretisiert werden.

Da wir partitionierte Verfahren zur Berechnung der Wechselwirkung von Strömung und Struktur einsetzen, können die Fluid- und Strukturgleichungen unabhängig voneinander diskretisiert werden. Dieses hat den Vorteil, daß für jedes Teilproblem effiziente Diskretisierungsverfahren in Raum und Zeit verwendet werden können. Durch die unterschiedliche Diskretisierung im Raum ergibt sich allerdings das Problem, daß am Fluid-Struktur-Rand inkompatible Gitter entstehen können. Auf diese Problematik wird im vierten Abschnitt genauer eingegangen, in dem die raumdiskrete Form der Kopplungsbedingungen untersucht wird. Die zeitliche Diskretisierung der Kopplungsbedingungen wird im nächsten Kapitel ausführlicher behandelt, wenn die verschiedenen Kopplungsalgorithmen vorgestellt werden. Einen weiteren Schwerpunkt in diesem Kapitel bildet im zweiten Abschnitt die Behandlung des sich bewegenden Fluidnetzes. Hierbei wird insbesondere auf das geometrische Erhaltungsgesetz eingegangen, das bei der Berechnung von Strömungen auf sich bewegenden Gebieten eine große Rolle spielt [LF96]. Dieses Kapitel wird mit einer abstrakten Formulierung des gesamten diskreten Problems und der iterativen Löser für die Teilprobleme abgeschlossen, auf der die Darstellung der Kopplungsalgorithmen im folgenden Kapitel aufbaut.

3.1 Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen werden im Raum sehr häufig mit Finiten Volumen oder Finiten Elementen diskretisiert [FP96], [Fle91a]. Wir werden hier eine Diskretisierung mit Finiten Elementen vorstellen, da diese auch in dem Programm verwendet werden [TB99], das wir später zur Berechnung von Beispielen einsetzen. Durch die räumliche Diskretisierung erhalten wir ein System von differential-algebraischen Gleichungen (DAE), das mit verschiedenen Einschrittverfahren numerisch integriert werden kann.

Die räumliche Diskretisierung der ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen geht von der Variationsform aus, die im letzten Kapitel hergeleitet wurde. Diese lautet

$$\mathcal{M}_f(v, \hat{v}) + \mathcal{N}_f(v - \dot{x}, v, \hat{v}) + \mathcal{B}_f(p, \hat{v}) + \mathcal{K}_f(v, \hat{v}) = \mathcal{G}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{V}_0^f \quad (3.1)$$

und

$$\mathcal{B}_f(\hat{q}, v) = 0 \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}_0^f. \quad (3.2)$$

Hierbei sind

$$\mathcal{Q}_0^f = \{\hat{q} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \hat{q} \in L_2(\Omega_0)\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{V}_0^f = \{\hat{v} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{v} \in H^1(\Omega_0), \hat{v}|_{\Gamma_0} = 0, \hat{v}|_{\Gamma_{f,1}} = 0\} \quad (3.4)$$

die Räume der Testfunktionen für den Druck und für die Geschwindigkeiten und

$$\mathcal{V}_0 = \{v : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid v \in H^1(\Omega_0), v|_{\Gamma_0} = v_g, v|_{\Gamma_{f,1}} = v_r\} \quad (3.5)$$

der Lösungsraum der Geschwindigkeiten. Für eine Finite Elemente Diskretisierung wird das Fluidgebiet Ω_0 in disjunkte Elemente Ω_e^f zerlegt, und die Geschwindigkeiten v werden in jedem Element durch Formfunktionen $N_e^f(\xi)$, die Funktionen im Raum sind, und Knotengeschwindigkeiten $\hat{V}_e(t)$, die nur von der Zeit abhängen, approximiert. Insgesamt erhält man daher eine Approximation für $v \in \mathcal{V}_0$ von der Form

$$v_h(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n_f} \hat{V}_i(t) N_i^f(\xi), \quad (3.6)$$

in der die Randbedingungen für die Geschwindigkeiten auf dem festen Rand $\Gamma_{f,1}$ und dem sich bewegenden Rand Γ bereits berücksichtigt sind. Analog läßt sich auch der Druck $p \in \mathcal{Q}_0^f$ durch

$$p_h(t, \xi) = \sum_{j=1}^{m_f} \hat{P}_j(t) N_j^p(\xi) \quad (3.7)$$

approximieren, wobei $N_j^p(\xi)$ die entsprechenden Formfunktionen in den jeweiligen Fluid-elementen und $\hat{P}_j(t)$ die nur von der Zeit abhängenden Druckwerte in den Elementknoten sind. Die Formfunktionen für die Geschwindigkeiten v und für den Druck p sind dabei

im allgemeinen verschieden. In jedem Element Ω_e^f sind die Formfunktionen N_i^f bzw. N_j^p Polynome eines bestimmten Grades, die an den Elementrändern gewisse Übergangsbedingungen erfüllen müssen. Wir verwenden hier Finite Elemente Ansatzfunktionen, die analog zu den bekannten Dreiecks-Stokes Elementen von Crouzeix und Raviart hergeleitet werden können [Tur99]. Dabei werden in einem Rechteck-Element im zweidimensionalen Fall stückweise rotierte bilineare Formfunktionen für die Geschwindigkeiten und stückweise konstante Approximationen für den Druck verwendet. Die Eigenschaften dieses Ansatzes werden in [Tur99] genauer beschrieben. Die (endlichdimensionalen) diskreten Räume der Testfunktionen $\mathcal{Q}_h^f \subset \mathcal{Q}_0^f$ und $\mathcal{V}_h^f \subset \mathcal{V}_0^f$ werden durch die Ansatzfunktionen N_i^f und N_j^p aufgespannt. Die diskrete Variationsform von (3.1) und (3.2) wird dann durch

$$\mathcal{M}_f(v_h, \hat{v}_h) + \mathcal{N}_f(v_h - \dot{x}_h, v_h, \hat{v}_h) + \mathcal{B}_f(p_h, \hat{v}_h) + \mathcal{K}_f(v_h, \hat{v}_h) = \mathcal{G}(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in \mathcal{V}_h^f \quad (3.8)$$

und

$$\mathcal{B}_f(\hat{q}_h, v_h) = 0 \quad \forall \hat{q}_h \in \mathcal{Q}_h^f \quad (3.9)$$

gegeben, wenn die Näherungen v_h und p_h in die Variationsform (3.1) und (3.2) eingesetzt und \mathcal{V}_0^f bzw. \mathcal{Q}_0^f durch die diskreten Räume \mathcal{V}_h^f bzw. \mathcal{Q}_h^f ersetzt werden. Die Approximation \dot{x}_h für die Gittergeschwindigkeit \dot{x} werden wir im nächsten Abschnitt erläutern. Der Vektor V bezeichnet im folgenden den raumdiskreten Vektor der Geschwindigkeiten in den Fluidknoten und P den raumdiskreten Druckvektor in den Druckknoten:

$$V = \left(\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_{n_f} \right)^t, \quad P = \left(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_{m_f} \right)^t.$$

Die räumliche Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen führt damit zu dem folgenden System von differential-algebraischen Gleichungen:

$$M_f \dot{V} + N_f(V - \dot{X})V + B_f P + K_f V = G, \quad (3.10)$$

$$B_f^t V = 0. \quad (3.11)$$

Dabei ist M_f die symmetrische und positiv definite Massenmatrix, $N_f(V - \dot{X})$ die unsymmetrische Advektionsmatrix, B_f die diskrete Gradientenmatrix, K_f diejenige Matrix, die aus den Diffusionstermen entsteht, und G der diskrete Kraftvektor. In der Advektionsmatrix N_f sind die konvektiven Anteile und die diskrete Gittergeschwindigkeit \dot{X} enthalten. Für die Konvektionsterme wird eine Stabilisierung entweder mit Upwinding-Techniken oder mit Streamline-Diffusion-Ansätzen durchgeführt. Wir verwenden hier ein Samarskij-Upwinding (vgl. [Tur99]), das auch in N_f zusammengefasst wird. Auf die Berechnung der diskreten Gittergeschwindigkeit \dot{X} wird im nächsten Abschnitt dieses Kapitels genauer eingegangen. Zusätzlich zu den Differentialgleichungen (3.10) und (3.11) sind noch Anfangsbedingungen der Form $V(0) = V_0$ vorgegeben, wobei V_0 der im Raum diskretisierte Geschwindigkeitsvektor von v_0 ist.

Für die Zeitintegration der Navier-Stokes Gleichungen (3.10) und (3.11) können verschiedene explizite oder implizite Einschrittverfahren verwendet werden. Häufig werden implizite Methoden eingesetzt, da die expliziten Verfahren Stabilitätsprobleme aufweisen können. Explizite Verfahren benötigen im allgemeinen sehr kleine Zeitschritte für eine stabile Berechnung der Strömungsgleichungen. Implizite Methoden erlauben dagegen größere Zeitschritte, die allerdings auch einen höheren numerischen Aufwand in jedem Zeitschritt bedeuten. Wir werden hier für die Zeitintegration der Fluidgleichungen (3.10) und (3.11) die Familie der θ -Einschrittverfahren verwenden. Bei diesen Verfahren muß im Zeitschritt t_{n+1} das folgende nichtlineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} M_f V_{n+1} + \theta \Delta t N_f(V_{n+1} - \dot{X}_{n+1}) V_{n+1} \\ + \theta \Delta t K_f V_{n+1} + \theta \Delta t B_f P_{n+1} = R_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$B_f^t V_{n+1} = 0. \quad (3.13)$$

Hierbei sind Δt der Zeitschritt des Verfahrens, V_{n+1} und P_{n+1} die diskreten Geschwindigkeiten und Druckwerte zum Zeitpunkt $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ und θ der Parameter des Einschrittverfahrens. Die diskrete Gittergeschwindigkeit \dot{X}_{n+1} wird hier als gegeben angenommen, die Berechnung dieser Größe wird im nächsten Abschnitt dargestellt. Die rechte Seite R_{n+1} in (3.12) ist durch

$$\begin{aligned} R_{n+1} = & \theta \Delta t G_{n+1} + (1 - \theta) \Delta t G_n + M_f V_n - (1 - \theta) \Delta t B_f P_n \\ & - (1 - \theta) \Delta t N_f(V_n - \dot{X}_n) V_n - (1 - \theta) \Delta t K_f V_n \end{aligned} \quad (3.14)$$

definiert.

Für $\theta = 0$ erhält man das explizite Euler-Verfahren, für $\theta = 1$ die implizite Euler-Methode und für $\theta = \frac{1}{2}$ das Crank-Nicolson Schema, das mit dem Trapez-Verfahren übereinstimmt. Das implizite Euler-Verfahren ist absolut stabil, aber nur von erster Ordnung konvergent. Die Crank-Nicolson Methode besitzt zwar eine quadratische Konvergenzordnung und ist A-stabil, es hat aber nur schwache Dämpfungseigenschaften [Fle91b], die sich bei Störungen oder schlecht gestellten Anfangsbedingungen nachteilig auswirken. Außerdem können bei Crank-Nicolson Verfahren Oszillationen in der Lösung auftreten, wenn die Zeitschritte Δt zu groß gewählt werden.

Als eine Alternative zu diesen einfachen Verfahren können die Zwischenschritt- θ -Verfahren („Fractional-Step Schemes“) angesehen werden, welche die Vorteile des impliziten Euler-Verfahrens und der Crank-Nicolson Methode miteinander verbinden [MU94]. In jedem Zeitschritt der Zwischenschritt- θ -Methode müssen mehrere nichtlineare Gleichungssysteme vom Typ (3.12) und (3.13) für verschiedene Zeitlevel und unterschiedliche Werte des

Parameters θ gelöst werden. Das Zwischenschritt- θ -Verfahren besteht aus den folgenden drei Zwischenschritten im Zeitschritt von t_n zu t_{n+1} :

$$\begin{aligned} (M_f + \tilde{\theta}\Delta t(N_f(V_{n+\theta} - \dot{X}_{n+\theta}) + K_f))V_{n+\theta} + \theta\Delta t B_f P_{n+\theta} \\ = (M_f - \beta\theta\Delta t(N_f(V_n - \dot{X}_n) + K_f))V_n - \theta\Delta t F_n, \\ B_f^t V_{n+\theta} = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (M_f + \tilde{\theta}\Delta t(N_f(V_{n+1-\theta} - \dot{X}_{n+1-\theta}) + K_f))V_{n+1-\theta} + \theta'\Delta t B_f P_{n+1-\theta} \\ = (M_f - \alpha\theta'\Delta t(N_f(V_{n+\theta} - \dot{X}_{n+\theta}) + K_f))V_{n+\theta} - \theta'\Delta t F_{n+1-\theta}, \\ B_f^t V_{n+1-\theta} = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} (M_f + \tilde{\theta}\Delta t(N_f(V_{n+1} - \dot{X}_{n+1}) + K_f))V_{n+1} + \theta\Delta t B_f P_{n+1} \\ = (M_f - \beta\theta\Delta t(N_f(V_{n+1-\theta} - \dot{X}_{n+1-\theta}) + K_f))V_{n+1-\theta} - \theta\Delta t F_{n+1-\theta}, \\ B_f^t V_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Der Makrozeitschritt $t_n \rightarrow t_{n+1}$ wird also durch die Zwischenschritte

$$t_n \rightarrow t_{n+\theta} \rightarrow t_{n+1-\theta} \rightarrow t_{n+1}$$

ersetzt. Dabei werden die folgenden Parameter gewählt:

$$\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta' = 1 - 2\theta, \quad \alpha = \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta}, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad \tilde{\theta} = \alpha\theta = \beta\theta'. \quad (3.18)$$

Es kann gezeigt werden, daß für diese spezielle Wahl der Parameter die Zwischenschritt- θ -Methode sowohl von zweiter Ordnung konvergent als auch stark A-stabil ist [MU94]. Aufgrund dieser Vorteile der Zwischenschritt- θ -Methode haben wir diese auch hier eingesetzt. In jedem Zwischenschritt dieser Methode müssen nichtlineare Gleichungssysteme von der Form (3.12) und (3.13) gelöst werden, die daher als ein Referenzsystem betrachtet werden können. Die nichtlinearen Systeme werden dann mit Newton- bzw. Quasi-Newton Verfahren iterativ gelöst.

3.2 Bewegung des Fluidnetzes

Wir wollen uns jetzt dem Problem zuwenden, wie die Geschwindigkeit \dot{X} des Referenzsystems in jedem Zeitschritt berechnet werden kann. Die Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_{n+1} wird durch das aktuelle Fluidgitter repräsentiert. Zur Berechnung der Geschwindigkeit des Referenzsystems, die explizit in die ALE-Formulierung der Fluidgleichungen eingeht, muß daher die Gittergeschwindigkeit bestimmt und damit ein Algorithmus zur Netzbewegung entwickelt werden.

3.2.1 Algorithmus zur Netzverformung

Es existieren verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Verschiebungen und Geschwindigkeiten der Gitterpunkte zum Zeitpunkt t_{n+1} . Die elementarsten Verfahren beruhen auf Interpolationsmethoden, die die Verschiebungen und Geschwindigkeiten am Fluidrand durch eine geeignete Interpolation auf das Fluidgitter übertragen. Bei der einfachsten Methode wird jedem beweglichen Gitterpunkt des Fluides ein bestimmter Knoten am Interface und ein Knoten am festen Rand des Fluidgebietes zugeordnet. Bei strukturierten Fluidgittern können dazu zum Beispiel die jeweiligen Gitterlinien verwendet werden. Die Netzposition und Netzgeschwindigkeit des Gitterknotens werden dann durch eine entsprechende Interpolationsfunktion berechnet. Diese kann in einfachen Fällen als eine lineare oder quadratische Interpolation gewählt werden. Es gibt aber auch komplexere Ansätze, bei denen zum Beispiel für die Interpolationsfunktion eine Approximation der Greenschen Funktion des Laplace-Operators verwendet wird [ML01].

Alternativ zu den Interpolationsmethoden kann das dynamische Fluidgitter als ein Pseudo-Struktursystem betrachtet werden. Die Bewegungsgleichungen für die Verschiebungen X der Gitterpunkte des Fluidgitters werden allgemein durch

$$\tilde{M}\ddot{X} + \tilde{C}\dot{X} + \tilde{K}X = \tilde{F} \quad (3.19)$$

beschrieben. Hierbei sind \tilde{M} , \tilde{C} und \tilde{K} fiktive Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen, die mit dem sich bewegenden Fluidnetz verknüpft sind. Durch \tilde{F} wird der Einfluß der Strukturbewegung auf das Fluidgitter beschrieben. Bei der Fluid-Struktur Interaktion wird \tilde{F} mit einer Transfermatrix \tilde{D} aus den Verschiebungen U der Struktur am Interface berechnet

$$\tilde{F} = \tilde{D}U. \quad (3.20)$$

Die Verschiebungen X und die Geschwindigkeiten \dot{X} der Gitterpunkte des Fluidnetzes müssen dabei am Fluid-Struktur Interface die Bedingungen

$$X(t) = U(t), \quad \dot{X}(t) = \dot{U}(t) \quad (3.21)$$

erfüllen, um eine Kompatibilität des Fluidgitters mit dem Strukturrand zu gewährleisten. Die Schwierigkeit besteht in der geeigneten Wahl der fiktiven Matrizen \tilde{M} , \tilde{C} und \tilde{K} . Die Elemente \tilde{k}_{ij} der Steifigkeitsmatrix werden oft dadurch modelliert, daß die Kanten der Elemente im Fluidnetz durch fiktive Federn ersetzt werden [Bat90]. Die Steifigkeiten \tilde{k}_{ij} der Federn zwischen zwei Gitterpunkten werden dabei als der inverse Abstand der beiden Punkte angenommen. Zusätzlich werden häufig noch weitere Freiheitsgrade hinzugefügt, indem zum Beispiel die Diagonalen in Rechteckselementen durch Federn ersetzt werden oder in Dreieckselemente an jedem Knoten Torsionsfedern hinzugenommen werden. Dieses dient dazu, daß sich keine irregulären Elemente bilden. Wenn sich der Rand des Fluidgebietes verformt, so verändert sich mit Hilfe der Federn auch das Fluidgitter entsprechend.

Die fiktiven Massen- und Dämpfungsmatrizen \tilde{M} und \tilde{C} werden meistens $\tilde{M} = 0$ und $\tilde{C} = 0$ gesetzt, um ein Nachschwingen des Netzes zu vermeiden. Daher erhält man für die Bewegungsgleichung (3.19) ein pseudo-stationäres Problem, das in jedem Zeitschritt zu lösen ist:

$$\tilde{K}X = \tilde{F} = \tilde{D}U. \quad (3.22)$$

Als Alternative zur Diskretisierung des Fluidgitters mit Federelementen kann das Netz auch als ein elastischer Körper betrachtet werden und mit Finiten Elementen diskretisiert werden. Dieses führt dann einem quasi-elastostatischen Pseudo-Struktur Ansatz für das Fluidnetz. Dabei wird in jedem Zeitschritt des Fluidlösers eine statische Lösung des elastischen Problems durchgeführt. Dieses führt wieder zu einem linearen Gleichungssystem der Form (3.22), bei dem die Matrix \tilde{K} aus den Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Netzelemente zusammengesetzt wird.

Wir verwenden hier denjenigen Algorithmus, bei dem das Fluidgitter durch Federelemente diskretisiert wird, da sich dieses Verfahren durch seine Einfachheit und Robustheit auszeichnet. So wird dieser Netzverschiebungsalgorithmus in sehr vielen Anwendungen aus dem Gebiet der Fluid-Struktur Wechselwirkung (insbesondere in der Aeroelastik) erfolgreich eingesetzt. Allerdings existieren Fälle, in denen die Verformungen der Struktur und damit auch die Verformungen des Fluidgitters sehr groß sind, und dadurch die Qualität des Fluidgitters, die für eine effiziente Strömungsberechnung eine große Rolle spielt, stark verschlechtert wird. In diesen Fällen muß eine Neuvernetzung („Remeshing“) des Fluidgebietes vorgenommen werden und die Variablen des Fluides (Geschwindigkeiten und Druck) von dem alten auf das neue Gitter interpoliert werden.

Mit Hilfe des beschriebenen Netzverformungsalgorithmus können nur die Positionen X_{n+1} des Fluidgitters zum Zeitpunkt t_{n+1} bestimmt werden. Es muß also noch erklärt werden, wie die Geschwindigkeiten \dot{X}_{n+1} berechnet werden, die für die ALE-Formulierung benötigt werden.

3.2.2 Geometrische Bilanzgleichungen

Bei der Berechnung der Gittergeschwindigkeiten muß der Zusammenhang zwischen dem Zeitschrittverfahren für die Fluidgleichungen und dem Algorithmus zur Netzbewegung berücksichtigt werden. An das resultierende numerische Verfahren zur Berechnung von Strömungen auf sich verformenden Gittern wird die Forderung gestellt, daß eine gleichförmige Strömung auf einem sich verformenden Gitter exakt berechnet werden soll. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das numerische Integrationsverfahren, das für das Fluid gewählt wird, und der Algorithmus zur Bewegung des Fluidnetzes eine diskrete geometrische Bilanzgleichung („Geometric Conservation Law“, kurz GCL) erfüllen. Diese geometrische Bilanzgleichung ist im Prinzip gleichwertig zu der GCL-Bedingung, die zuerst in [TL79]

für strukturierte Gitter und Finite Differenzen Schemata hergeleitet wurde. Obwohl die GCL-Bedingung schon seit längerem bekannt ist, wurde die Bedeutung dieser geometrischen Bilanzgleichung erst in letzter Zeit genauer erkannt. Entscheidende Arbeiten zu dieser Thematik stammen von Farhat et al. [FLM95], Lesoinne und Farhat [LF96], Guillard und Farhat [GF98], LeTallec und Mani [LM01]. Allerdings befassen sich die meisten Arbeiten zu dieser Thematik nur mit dem einfacheren Fall von nicht-viskosen Strömungen oder untersuchen nur Zeitschrittverfahren, die von erster Ordnung genau sind. Die Diskussion zu dem geometrischen Erhaltungsgesetz ist bei weitem noch nicht abgeschlossen, und es existieren keine einheitlichen Ergebnisse.

In dem Fall, daß Finite Volumen Verfahren für die räumliche Diskretisierung der Fluidgleichungen verwendet werden, kann das geometrische Erhaltungsgesetz relativ einfach hergeleitet und interpretiert werden. Dazu wird das raumdiskrete Finite Volumen Schema

$$\frac{d}{dt}(A^j Z^j) + F_j(Z, X, \dot{X}) = 0 \quad (3.23)$$

in dem Knoten j betrachtet, wobei A^j das Volumen der Zelle C_j , Z^j den Vektor der Fluidvariablen und F_j den numerischen Flußvektor des Knotens j bezeichnen. Dieser numerische Flußvektor approximiert den Fluß über den Zellenrand ∂C_j mit Hilfe der numerischen Flußvektoren Φ_+^c und Φ_-^c :

$$F_j(Z, X, \dot{X}) = \sum_k \int_{\partial C_{j,k}} (\Phi_+^c(Z^j, \dot{X}) + \Phi_-^c(Z^k, \dot{X})) \cdot n \, ds.$$

Für die numerischen Flußvektoren Φ_+^c und Φ_-^c gilt die Konsistenzeigenschaft

$$\Phi_+^c(Z, \dot{X}) + \Phi_-^c(Z, \dot{X}) = \Phi^c(Z) = \Phi(Z) - \dot{X}Z,$$

wobei Φ^c den konvektiven ALE-Flußvektor und Φ den gewöhnlichen Flußvektor bezeichnet. Integriert man die Gleichung (3.23) zwischen t_n und t_{n+1} , so ergibt sich

$$A_{n+1}^j Z_{n+1}^j - A_n^j Z_n^j + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_j(Z, X, \dot{X}) \, dt = 0. \quad (3.24)$$

Wenn die Fluidlösung konstant ist, dann gilt $Z_n^j = Z_{n+1}^j = Z^*$ für alle Knoten j , und es folgt für den Integralausdruck:

$$F_j(Z^*, X, \dot{X}) = \int_{\partial C_j} (\Phi(Z^*) - \dot{X}Z^*) \cdot n \, ds. \quad (3.25)$$

Aufgrund der Eigenschaft

$$\int_{\partial C_j} \Phi(Z^*) \cdot n \, ds = 0 \quad (3.26)$$

erhält man damit insgesamt die Gleichung

$$A_{n+1}^j - A_n^j = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial C_j} \dot{X} \cdot n \, ds \, dt, \quad (3.27)$$

wobei ∂C_j der Rand der Zelle C_j ist. Die Bedingung (3.27) kann dann folgendermaßen gedeutet werden: Es sagt aus, daß die Änderung der Fläche jedes Kontrollvolumens in einem gegebenen Zeitintervall genau so groß sein muß wie die Fläche, die von den Zellrändern in diesem Zeitintervall überstrichen wird. Da die linke Seite in Gleichung (3.27) aufgrund des Algorithmus zur Netzverformung exakt berechnet werden kann, wird diese Forderung auch an die Berechnung des rechten Integrals gestellt. Im zweidimensionalen Fall ist dieses äquivalent zur Bedingung

$$\dot{X}_{n+1} = \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t}. \quad (3.28)$$

Eine „mathematische“ Interpretation der Einhaltung der geometrischen Bilanzgleichung kann dadurch gegeben werden, daß das resultierende numerische Verfahren zur Berechnung der Strömung auf sich bewegendem Gitter in der Zeit mindestens von erster Ordnung genau ist [LM01]. Die Einhaltung der GCL-Bedingung erhöht also die Zeitgenauigkeit des Verfahrens.

Für stabilisierte Finite Elemente Methoden, die in der Zeit von erster oder zweiter Ordnung genau sind, ist in [LF96] gezeigt worden, daß die Geschwindigkeiten des dynamischen Netzes ebenfalls wie in (3.28) berechnet werden müssen, damit die geometrische Bilanzgleichung erfüllt ist. In den meisten Fällen wird die Netzgeschwindigkeit in natürlicher Weise wie in (3.28) gewählt, so daß das geometrische Erhaltungsgesetz automatisch erfüllt ist. Dieses ist insbesondere dann der Fall, wenn die Netzpositionen X_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} mit dem pseudo-stationären Ansatz $\tilde{K}X = \tilde{D}U$ berechnet werden. Wir haben hier den Ansatz (3.28) zur Berechnung der Gittergeschwindigkeiten eingesetzt, so daß die geometrische Bilanzgleichung dadurch erfüllt wird.

Alternativ zu diesem Ansatz können die Zeitschrittweiten für die numerische Integration der Fluidgleichungen so klein gewählt werden, daß die geometrische Bilanzgleichung automatisch erfüllt ist. Dieses beinhaltet allerdings den Nachteil eines stark erhöhten Rechenaufwandes. Außerdem ergibt sich dabei das Problem, eine maximale Schrittweite für eine akzeptable Lösung zu finden. In der Literatur (s. [LF96], [MMV98b]) existieren zahlreiche Beispiele, bei denen sehr große Fehler auftreten können, wenn die Zeitschrittweiten zu groß gewählt werden und damit das geometrische Erhaltungsgesetz nicht eingehalten wird.

3.2.3 Das gesamte diskrete Fluidproblem

Nachdem der Algorithmus zur Bewegung des Fluidnetzes vorgestellt worden ist, soll jetzt das komplette diskrete Fluidproblem in einer abstrakten Form zusammengefasst werden. Dazu werden die Gleichung (3.22) und die Bedingung (3.28) zur Einhaltung der geometrischen Bilanzgleichung zu den diskreten Fluidgleichungen, die durch die nichtlinearen Gleichungssysteme (3.12) und (3.13) gegeben werden, hinzugefügt. Das diskrete Fluidpro-

blem kann dann kurz als

$$N(V_{n+1}, P_{n+1}, X_{n+1}, \dot{X}_{n+1}) = 0 \quad (3.29)$$

formuliert werden, wobei die äußeren Kräfte G und die Ausdrücke zum Zeitpunkt t_n implizit in (3.29) enthalten sind und die Bewegung des Fluidrandes Γ vorgegeben ist. Diese ergibt sich bei der Fluid-Struktur Interaktion durch die Verschiebungen und Geschwindigkeiten des Interfaces. Weiter kann man die Iteration zur Lösung des nichtlinearen Systems (3.29) abstrakt als Fixpunktiteration

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, X_{n+1}, \dot{X}_{n+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

schreiben, wobei X_{n+1} und \dot{X}_{n+1} die Gitterpositionen und Gittergeschwindigkeiten zum Zeitpunkt t_{n+1} sind. In unserem Fall entspricht diese Fixpunktiteration einer Newton-Raphson Iteration.

3.3 Diskretisierung der Strukturdynamik

Die partiellen Differentialgleichungen der Strukturdynamik werden im Raum mit Finiten Elementen diskretisiert. Die Methode der Finiten Elemente wurde für Probleme der Strukturmechanik entwickelt (vgl. [ZT94], [ZT91]) und dort seit ungefähr 1958 angewendet. Die räumliche Diskretisierung der Strukturgleichungen (2.29) mit Finiten Elementen geht von der Variationsform (2.41)

$$\mathcal{M}_s(u, \hat{u}) + \mathcal{K}_s(u, \hat{u}) = \mathcal{F}(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{V}^s \quad (3.31)$$

aus, wobei

$$\mathcal{V}^s = \{\hat{u} : \Omega_s \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{u} \in H^1(\Omega_s), \hat{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_{s,1}\} \quad (3.32)$$

den Raum der Testfunktionen bezeichnet.

Für eine Diskretisierung mit Finiten Elementen zerlegen wir das Strukturgebiet Ω_s in disjunkte Elemente Ω_e^s und approximieren die Verschiebungen u in jedem Element Ω_e^s durch Formfunktionen $N_e^s(\xi)$, die Funktionen im Raum sind, und Knotenverschiebungen $\hat{U}_e(t)$, die nur von der Zeit abhängen. Die Formfunktionen $N_e^s(\xi)$ sind dabei in jedem Element Ω_e^s Polynome eines bestimmten Grades und müssen an den Rändern der Elemente stetig ineinander übergehen. In dieser Arbeit werden lineare und quadratische Ansatzfunktionen für die Verformungen verwendet. Damit werden die Verschiebungen u in Ω_s durch

$$u_h(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n_s} \hat{U}_i(t) N_i^s(\xi) \quad (3.33)$$

approximiert, wobei u_h die Randbedingungen (2.36) für die Verschiebungen erfüllt. Der diskrete Raum der Testfunktionen $\mathcal{V}_h^s \subset \mathcal{V}^s$ wird durch die Formfunktionen N_i^s aufgespannt, so daß es sich hier um einen konformen Ansatz handelt. Die diskrete Variationsform von (2.41) lautet dann

$$\mathcal{M}_s(u_h, \hat{u}_h) + \mathcal{K}_s(u_h, \hat{u}_h) = \mathcal{F}(\hat{u}_h) \quad \forall \hat{u}_h \in \mathcal{V}_h^s. \quad (3.34)$$

Setzt man jetzt die Approximation (3.33) und die Formfunktionen N_i^s als Testfunktionen in (3.34) ein und bezeichnet mit

$$U = \left(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_{n_s} \right)^t$$

den raumdiskreten Vektor der Verschiebungen, so erhält man das folgende System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$M_s \ddot{U} + K_s(U) = F. \quad (3.35)$$

Hierbei ist M_s die symmetrische und positiv definite Massenmatrix, $K_s(U)$ enthält die nichtlinearen Anteile, die aufgrund der geometrisch nichtlinearen Formulierung entstehen, und F bezeichnet den diskreten Kraftvektor. Für einen linearisierten Verzerrungstensor ist K_s die symmetrische Steifigkeitsmatrix. Die Dämpfung im System wird durch einen zusätzlichen Ausdruck $C_s \dot{U}$ in (3.35) modelliert, wobei die Dämpfungsmatrix C_s als eine Linearkombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix gewählt wird. Weiter sind noch Anfangsbedingungen

$$U(0) = U_0, \quad \dot{U}(0) = W_0$$

vorgegeben, wobei U_0 und W_0 die diskreten Vektoren von u_0 und w_0 aus den Anfangsbedingungen (2.35) sind. Die Randbedingungen (2.36) für die Verschiebungen sind in der räumlichen Diskretisierung der Strukturgleichungen berücksichtigt worden, die Randbedingungen für die Spannungen (2.37) sind in der rechten Seite F enthalten.

Für die Zeitintegration der Strukturgleichungen (3.35) verwenden wir die Hilber-Hughes-Taylor- α -Methode (kurz: HHT- α -Methode), die auch als generalisiertes α -Zeitschrittverfahren bekannt ist. Dieses Verfahren ist im Zeitschritt t_{n+1} durch

$$M_s A_{n+\alpha} + C_s W_{n+\alpha} + K_s(U_{n+\alpha}) = F_{n+\alpha} \quad (3.36)$$

definiert. Die Größen $U_{n+\alpha}$, $W_{n+\alpha}$, $A_{n+\alpha}$ und $F_{n+\alpha}$ sind durch

$$\begin{aligned} U_{n+\alpha} &= (1 - \alpha)U_{n+1} + \alpha U_n, \\ W_{n+\alpha} &= (1 - \alpha)W_{n+1} + \alpha W_n, \\ A_{n+\alpha} &= A_{n+1}, \\ F_{n+\alpha} &= F((1 - \alpha)t_{n+1} + \alpha t_n) \end{aligned}$$

gegeben, wobei W_{n+1} die Geschwindigkeiten und A_{n+1} die Beschleunigungen in den Strukturknoten zum Zeitpunkt t_{n+1} sind. Die Verschiebungen U_{n+1} und die Geschwindigkeiten W_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} ergeben sich durch

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t W_n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) A_n + \beta A_{n+1} \right), \quad (3.37)$$

$$W_{n+1} = W_n + \Delta t ((1 - \gamma) A_n + \gamma A_{n+1}). \quad (3.38)$$

Mit Δt wird dabei die Zeitschrittweite des Integrationsverfahrens bezeichnet, α , β und γ sind die Parameter des HHT- α -Verfahrens. Für lineare Systeme der Form

$$M_s \ddot{U} + C_s \dot{U} + K_s U = F \quad (3.39)$$

kann gezeigt werden [ZT91], daß die HHT- α -Methode für die folgenden Werte der Parameter α , β und γ absolut stabil und konvergent von zweiter Ordnung ist:

$$\alpha \in [-\frac{1}{3}, 0], \quad \gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}. \quad (3.40)$$

Für den speziellen Wert $\alpha = 0$ (d.h. $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$) erhält man das bekannte Newmark-Schema, das für Probleme der Strukturdynamik in sehr vielen Fällen eingesetzt wird. Außerdem besitzen die HHT- α -Verfahren bei entsprechender Wahl des Parameters α die Eigenschaft, hohe Frequenzen maximal und niedrige Frequenzen minimal zu dämpfen. Auf nichtlineare Systeme der Form (3.35) lassen sich die Aussagen über die absolute Stabilität dieser Verfahren im allgemeinen nicht übertragen. Im nichtlinearen Fall werden Stabilitätskriterien häufig auf Energiebetrachtungen zurückgeführt [Kuh96]. Wir werden in dieser Arbeit sowohl das klassische Newmark-Verfahren als auch die Hilber-Hughes-Taylor- α -Methode einsetzen, um (insbesondere beim dritten Beispiel) die Dämpfungseigenschaften dieses Verfahrens auszunutzen.

In jedem Zeitschritt des HHT- α -Verfahrens muß ein nichtlineares Gleichungssystem der Form (3.36) gelöst werden. Dazu wird im allgemeinen eine Newton-Raphson Iteration eingesetzt, die die partiellen Ableitungen der nichtlinearen Terme in $K_s(U)$ benötigt. Die nichtlinearen Ausdrücke in (3.36) können entweder als

$$K_s(U_{n+\alpha}) = (1 - \alpha)K_s(U_{n+1}) + \alpha K_s(U_n) \quad (3.41)$$

oder alternativ als

$$K_s(U_{n+\alpha}) = K_s((1 - \alpha)U_{n+1} + \alpha U_n) \quad (3.42)$$

bestimmt werden. Analog kann die rechte Seite des nichtlinearen Gleichungssystems (3.36) durch den folgenden Ausdruck approximiert werden:

$$F_{n+\alpha} = F((1 - \alpha)t_{n+1} + \alpha t_n) \approx (1 - \alpha)F_{n+1} + \alpha F_n. \quad (3.43)$$

Das nichtlineare Gleichungssystem (3.36) wird entweder nach A_{n+1} aufgelöst, wenn die Ansätze (3.37) und (3.38) in dieses System eingesetzt werden, oder es wird eine Lösung für U_{n+1} berechnet, indem man die Gleichungen (3.37) und (3.38) nach den Geschwindigkeiten W_{n+1} und den Beschleunigungen A_{n+1} umformt und dann in (3.36) einsetzt.

In einer abstrakten Form kann das nichtlineare Gleichungssystem (3.36) als

$$S(U_{n+1}, W_{n+1}) = F_{n+1} \quad (3.44)$$

geschrieben werden. Die Darstellung (3.44) wird daher gewählt, da bei der Wechselwirkung von Fluid und Struktur die Verschiebungen und Geschwindigkeiten der Struktur benötigt werden. In der rechten Seite F_{n+1} sind dabei alle Terme des Zeitschritt t_n und die äußeren Kräfte F_{n+1} enthalten. Die Newton-Raphson Iteration zur Lösung dieses Systems läßt sich als Fixpunktiteration

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(F_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

formulieren.

3.4 Diskrete Form der Kopplungsbedingungen

Nachdem wir die Diskretisierung der Strömungs- und Strukturgleichungen vorgestellt haben, wollen wir jetzt die diskreten Kopplungsbedingungen untersuchen. Die Kopplungsbedingungen auf dem Fluid-Struktur Interface Γ lauten für die raumdiskreten Geschwindigkeiten und Spannungstensoren für $t \in [0, T]$:

$$V(t) = \dot{U}(t) = W(t), \quad \sigma_h^f(t) \cdot n = \sigma_h^s(t) \cdot n \quad \text{auf } \Gamma. \quad (3.46)$$

Hierbei bezeichnen σ_h^f bzw. σ_h^s die im Raum diskretisierten Cauchyschen Spannungstensoren des Fluides bzw. der Struktur. Nach der Zeitdiskretisierung der Fluid- und Strukturgleichungen ergeben sich die folgenden diskreten Kopplungsbedingungen auf dem Fluid-Struktur Interface Γ_{n+1} zur Zeit $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$:

$$V_{n+1} = W_{n+1}, \quad \sigma_{n+1}^f \cdot n = \sigma_{n+1}^s \cdot n \quad \text{auf } \Gamma_{n+1}. \quad (3.47)$$

Dabei sind σ_{n+1}^f und σ_{n+1}^s die zeit- und raumdiskreten Spannungstensoren des Fluids und der Struktur am Interface Γ_{n+1} zur Zeit t_{n+1} . Die diskreten Kopplungsbedingungen (3.46) bzw. (3.47) werden aufgrund der Diskretisierung im Raum nur an lokalen Punkten und nicht global auf dem Rand Γ_{n+1} erfüllt. Wir werden in diesem Abschnitt diejenigen Probleme untersuchen, die aufgrund der unterschiedlichen räumlichen Diskretisierung der Fluid- und Strukturgleichungen und der Kopplung an einem gemeinsamen Interface auftreten. Die Probleme der zeitlichen Diskretisierung werden im nächsten Kapitel ausführlich behandelt, wenn die verschiedenen Kopplungsalgorithmen vorgestellt werden.

Bei der Formulierung der kontinuierlichen Kopplungsbedingungen in Abschnitt 2.3 wurde bereits erwähnt, daß das Fluidproblem mit Dirichlet-Randbedingungen für die Geschwindigkeiten und das Strukturproblem mit Neumann-Randbedingungen für die Spannungen berechnet wird. Daher wird der erste Teil der diskreten Kopplungsbedingungen (3.47) den diskreten Fluidgleichungen (3.12) und (3.13) hinzugefügt, während die zweiten Kopplungsbedingungen in den Kraftvektor F auf der rechten Seite der diskreten Strukturgleichungen (3.35) eingehen.

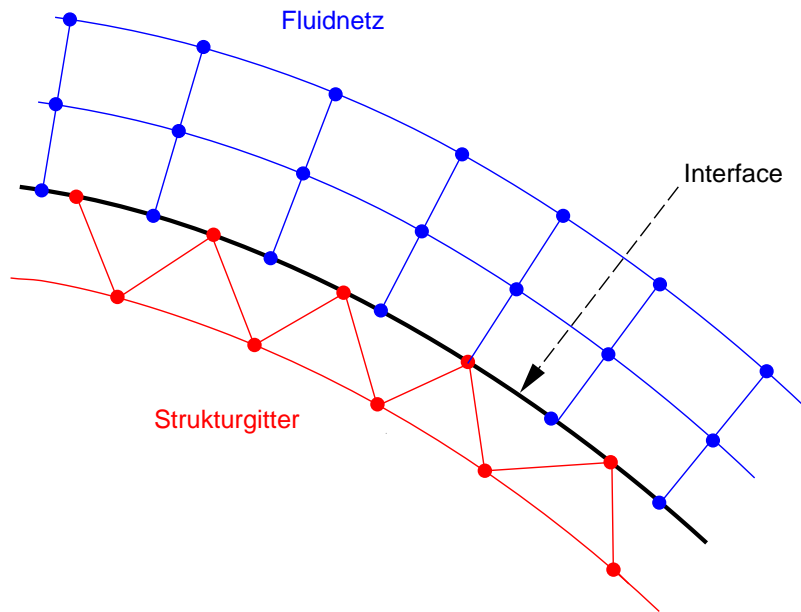


Abbildung 3.1: *Inkompatible Gitter am Fluid-Struktur-Interface*

Einer der großen Vorteile der hier eingesetzten partitionierten Verfahren besteht darin, daß separate Löser zur Berechnung der Teilprobleme und damit effiziente Diskretisierungs- und Lösungsverfahren für diese Probleme eingesetzt werden können. Auf der anderen Seite treten dadurch auch zusätzliche Schwierigkeiten auf, da die Löser für die Teilprobleme im allgemeinen verschiedene Gitter generieren und unterschiedliche Finite Elemente oder Finite Volumen Typen verwenden. Zum Beispiel wird das Fluidproblem oft auf strukturierten Gittern berechnet, während die Strukturprobleme häufig mit unstrukturierten Netzen gelöst werden. Dieses führt bei der Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur zu dem Problem, daß die Gitter am Fluid-Struktur Rand inkompatibel sind und nicht zueinander passen (s. Abbildung 3.1). Daher müssen spezielle Techniken entwickelt und untersucht werden, wie die raumdiskreten Kopplungs- bzw. Randbedingungen (3.47) zu behandeln sind.

Als eine Fragestellung ergibt sich dabei, wie die Verschiebungen und Geschwindigkeiten

in den Randknoten der Struktur auf die entsprechenden Knoten des Fluides am Rand übertragen werden können, um die Geometrie des Fluidgebietes bzw. das Fluidgitter zu verändern und die kinematischen Randbedingungen für die Fluidgeschwindigkeiten zu bestimmen. Im ersten Teilabschnitt werden verschiedene Lösungsmöglichkeiten für dieses Problem vorgestellt.

Ein weiteres Problem erhält man, wenn die auf die Struktur wirkenden Fluidkräfte berechnet werden sollen. Dazu müssen die Spannungen des Fluides am Interface, die in den Knoten des Fluidgitters vorliegen, in entsprechende Spannungen in den Gaußknoten des Strukturnetzes am Rand transformiert werden, so daß die Strukturgleichungen mit Neumann-Randbedingungen für die Spannungen gelöst werden können. Diese Problematik wird im zweiten Teilabschnitt untersucht.

In den folgenden Teilabschnitten wird die zeitliche Diskretisierung der Kopplungsbedingungen (3.47) nicht berücksichtigt und daher die Zeitindizes weggelassen. Es soll nur die Problematik untersucht werden, die aufgrund der unterschiedlichen räumlichen Diskretisierung entsteht.

3.4.1 Transfer der Strukturdaten

Als erstes wollen wir uns dem Problem zuwenden, wie die Verschiebungen U , die in den Strukturknoten am Rand der Struktur vorliegen, auf die entsprechenden Randknoten des Fluidgitters transferiert werden können (s. Abbildung 3.1). Eine ähnliche Problematik ergibt sich, wenn die Geschwindigkeiten W der Struktur am Rand als Randbedingungen in die Fluidknoten am Rand aufgebracht werden sollen. Darauf werden wir am Ende dieses Abschnittes kurz eingehen.

Die Verschiebungen U_j^f in den Randknoten des Fluidgitters werden durch den Ansatz

$$U_j^f = \sum_{i=1}^{i_s} d_{ji} U_i^s \quad (3.48)$$

beschrieben, wobei U_i^s die Verschiebungen in den Strukturknoten i am Rand der Struktur sind. Für die Berechnung der Koeffizienten d_{ji} sind verschiedene Techniken entwickelt worden, die unterschiedliche Gesichtspunkte berücksichtigen. So kann man zwischen einem lokalen und einem globalen Ansatz unterscheiden. Bei der lokalen Variante werden die Verschiebungen in den Randknoten des Fluidgitters nur mit Hilfe der Verschiebungen in den Strukturknoten der direkt benachbarten Strukturelemente berechnet, bei dem globalen Ansatz hängen sie von allen Randverschiebungen der Struktur ab. Wir werden hier die wichtigsten Algorithmen vorstellen, die in den meisten Fällen angewendet werden:

1. Konsistentes Interpolationsverfahren [CL97], [FLL98]:

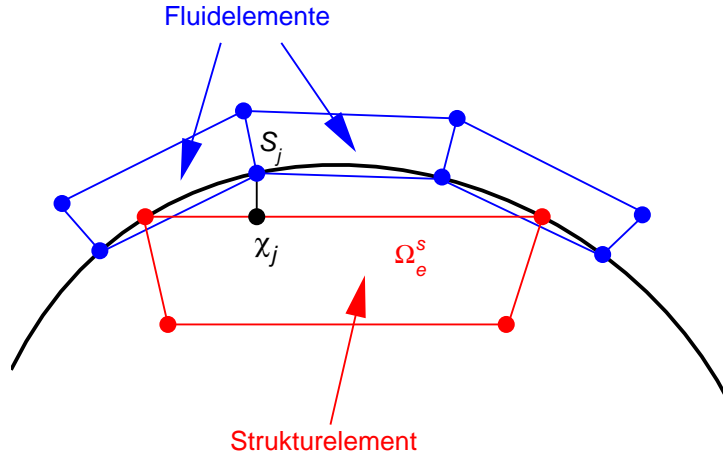


Abbildung 3.2: Projektion eines Fluidgitterpunktes in das Strukturelement

Die einfachste Lösung für den Transfer der Verschiebungen vom Strukturgitter auf das Fluidnetz bieten zwei- bzw. dreidimensionale Interpolationsverfahren. Dazu müssen jeweils die benachbarten Punkte des Strukturnetzes und des Fluidgitters gesucht werden und daraufhin die Werte der Verschiebungen von den Strukturknoten auf die Fluidknoten interpoliert werden. Dabei können allerdings relativ große Fehler entstehen, da die Teilprobleme im allgemeinen unterschiedlich fein diskretisiert sind. Außerdem existieren sowohl im Strukturlöser als auch im Fluidlöser Interpolationsverfahren in den einzelnen Elementen, die hierbei nicht berücksichtigt werden.

Wir werden daher ein konsistentes Interpolationsverfahren vorstellen, das sich durch seine Robustheit auszeichnet. Dieses Schema wird konsistent genannt, da es die Finite Elemente Interpolation des Strukturlösers verwendet. Es besteht aus den folgenden Teilschritten (vgl. Abbildung 3.2):

- (a) Zuerst wird der Punkt S_j des Fluidgitters, in dem die Verschiebung U_j^f berechnet werden soll, in das am nächsten liegende Strukturelement Ω_e^s projiziert.
- (b) Als nächstes werden die natürlichen Koordinaten χ_j von der Projektion in dem Element Ω_e^s bestimmt.
- (c) Die Verschiebungen U_j^f werden dann mit Hilfe der Interpolation im Strukturelement Ω_e^s berechnet:

$$U_j^f = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^s(\chi_j) U_i^e.$$

Hierbei sind N_i^s die Formfunktionen und U_i^e die Knotenverschiebungen in dem Element Ω_e^s .

Bei dem konsistenten Interpolationsverfahren handelt es sich offensichtlich um ein lokales Verfahren. Dieses Verfahren wird in sehr vielen Anwendungen (insbesondere der Aeroelastik) eingesetzt und hat sich dort gut bewährt [FLL98]. Allerdings können auch bei dieser Methode Fehler entstehen, wenn die Gitter unterschiedlich fein sind und insbesondere adaptive Netze verwendet werden. In diesen Fällen muß das Interpolationsverfahren an die Adaptivität der Verfahren angepasst werden [CL97].

2. Mortar-Element Techniken [FLL98], [LM97]:

Als eine Alternative zu dem konsistenten Interpolationsverfahren kann eine Mortar-Element Methode gewählt werden, bei der die Gleichheit der Fluid- und Strukturverschiebungen am Rand durch die Methode der gewichteten Residuen erfüllt wird. Dazu werden die geometrischen Kopplungsbedingungen mit einer Ansatzfunktion λ gewichtet und über den Rand Γ integriert:

$$\int_{\Gamma} \lambda \cdot (u_s - u_f) ds = 0. \quad (3.49)$$

λ wird dabei als Lagrange-Multiplikator bezeichnet. Die gewichtete Residuenmethode wird in diesem Zusammenhang Mortar-Element Methode genannt, wenn die Ansatzfunktion λ als die Spur des Finite Elemente Ansatzraumes von u_s bzw. u_f auf Γ gewählt werden. Wenn für λ die Finite Elemente Ansatzfunktionen des Fluides verwendet werden, dann führt dieses zu dem folgenden linearen Gleichungssystem für die diskreten Verschiebungen U_f :

$$A_f U_f = A_s U_s. \quad (3.50)$$

Dabei ist A_f eine quadratische nicht-singuläre Matrix und A_s im allgemeinen eine nicht quadratische Matrix, da es am Interface unterschiedlich viele Struktur- und Fluidknoten gibt. U_s bezeichnet die Verschiebungen in den Randknoten der Struktur. In diesem Fall kann U_f symbolisch durch

$$U_f = A_f^{-1} A_s U_s \quad (3.51)$$

berechnet werden, so daß man wieder eine Repräsentation wie in (3.48) erhält. Hierbei handelt es sich um einen globalen Ansatz, da die Verschiebungen U_f aufgrund der vollbesetzten Matrix A_f^{-1} von allen Verschiebungen U_s abhängt.

Die Mortar-Element Methode besitzt gegenüber dem konsistenten Interpolationschema den Vorteil, daß sie im mathematischen Sinne optimal ist [FLL98], [LM97].

So kann – bei der Verwendung von Mortar-Element Techniken für Gebietszerlegungsverfahren – gezeigt werden, daß der globale Diskretisierungsfehler des gekoppelten Problems nicht schlechter wird als der lokale Diskretisierungsfehler in den Teilproblemen [LM97]. Diese Aussage gilt für Gebietszerlegungsverfahren, bei denen auf den verschiedenen Teilgebieten das gleiche Problem (evtl. mit unterschiedlichen Diskretisierungstechniken) gelöst wird. Für Probleme der Fluid-Struktur Interaktion existieren bisher keine Ergebnisse für diese Approximationseigenschaft. Ein Nachteil der Mortar-Element Methode ist allerdings, daß in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Dieses Gleichungssystem hat die Größenordnung der Anzahl der Fluidknoten am Rand der Struktur. Da das Fluidgitter am Fluid-Struktur Interface meistens sehr fein ist, bedeutet dieses einen erhöhten numerischen Aufwand in jedem Zeitschritt.

In dieser Arbeit werden die konsistenten Interpolationsverfahren zur Transformation der Strukturdaten auf das Fluidgitter eingesetzt. Dieses begründet sich zum einen durch die Robustheit dieser Verfahren [FLL98] und zum anderen dadurch, daß in dem verwendeten Kopplungsinterface (GRISLi, vgl. Kapitel 5) diese Interpolationsverfahren bereits implementiert sind.

Für den Transfer der Strukturgeschwindigkeiten am Rand können ähnliche Techniken wie für die Strukturverschiebungen verwendet werden. Die Geschwindigkeiten W_{n+1} in den Strukturknoten müssen dazu in Geschwindigkeiten in den Fluidknoten am Rand transformiert werden, damit die kinematischen Randbedingungen für die Geschwindigkeiten bestimmt werden können. Alternativ können auch die Verschiebungen U_{n+1}^f in den Randknoten des Fluidnetzes verwendet werden, um die Randgeschwindigkeiten zu berechnen:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}^f - U_n^f}{\Delta t} \quad \text{auf } \Gamma_{n+1}. \quad (3.52)$$

Wir verwenden in unseren Anwendungsbeispielen ebenfalls diese Methode zur Berechnung der Geschwindigkeiten am Rand.

3.4.2 Transfer der Fluidlasten

Für den Transfer der Fluidkräfte, die auf die Struktur wirken, werden ähnliche Techniken wie beim Geometrietransfer eingesetzt. Die Inkompatibilität der Fluid- und Strukturgitter am Interface muß dabei wieder beachtet werden. Außerdem kann man – wie beim Geometrietransfer – zwischen einem lokalen und einem globalen Ansatz unterscheiden. Bei dem Lasttransfer müssen die Spannungen des Fluides, die in den Fluidknoten am Rand vorliegen, in die Randknoten des Strukturnetzes transformiert werden. Wir gehen hier davon aus, daß das Strukturproblem im Raum durch Finite Elemente Methoden gelöst wird,

das Fluidproblem kann alternativ mit Finiten Volumen oder Finiten Elementen berechnet werden. Man kann zwischen verschiedenen Techniken für den Transfer der Fluidkräfte auswählen:

1. Konsistente Interpolationsverfahren [FLL98], [MF95]:

Wie auch bei dem Transfer der Geometriedaten sind Interpolationsverfahren die einfachsten Methoden für den Lasttransfer. Dabei muß allerdings beachtet werden, daß die Gitter am Fluid-Struktur Interface unterschiedlich fein sein können. Dadurch können bei einfachen Interpolationsverfahren große Fehler entstehen [CL97]. Wir werden hier daher ein konsistentes Interpolationsverfahren vorstellen, das die Interpolation des Fluidlösers verwendet und deshalb als konsistent bezeichnet wird.

Die Knotenkräfte f_i^e in dem Knoten i des Strukturelements Ω_e^s werden durch

$$f_i^e = \int_{\Omega_e^s} N_i^s \cdot (\sigma_h^f \cdot n) dx \quad (3.53)$$

berechnet, wobei n die äußere Normale zu Ω_e^s , N_i^s die Finite Elemente Formfunktion zu dem Knoten i des Elements und σ_h^f der diskrete Spannungstensor des Fluides ist. Im allgemeinen wird das Integral (3.53) durch eine Gaußsche Quadraturformel approximiert:

$$f_i^e \approx \sum_{g=1}^{n_g} w_g N_i^s(\xi_g) \sigma_h^f(\xi_g) \cdot n. \quad (3.54)$$

Hierbei sind w_g die Gewichte und ξ_g die Gaußpunkte der Gaußschen Quadraturformel. Die Gaußquadratur, die zur Berechnung von (3.54) verwendet wird, kann sich dabei von der numerischen Integrationsmethode, die für die Berechnung der lokalen Steifigkeitsmatrix im Strukturelement eingesetzt wird, unterscheiden. In der Approximation (3.54) werden zum einen die äußere Normale n zum Fluid-Struktur Interface und zum anderen die Werte des Spannungstensors σ_h^f in den Gaußpunkten ξ_g des Strukturelementes Ω_e^s benötigt.

Bei der Wahl der äußeren Normalen kann man zwischen dem Normalenvektor zu den Fluidelementen, den Strukturelementen oder zu dem physikalischen (realen) Fluid-Struktur Interface Γ wählen. In fast allen Fällen wird die Normale zu den Strukturelementen verwendet, da dieses bei der Berechnung der Strukturkräfte als eine natürliche Wahl erscheint.

Die Auswertung des Spannungstensors σ_h^f in den Gaußpunkten ξ_g des Strukturelements erfolgt dadurch, daß die Gaußpunkte $\xi_g \in \Omega_e^s$ in das entsprechende Fluid-Element Ω_e^f am Rand projiziert werden. Dort können die Spannungen des Fluides in den Gaußpunkten durch die Interpolationsmethode des Fluides berechnet werden, wie in Abbildung 3.3 angedeutet wird. Dabei müssen zu jedem Gaußpunkt

die entsprechenden Fluidknoten gesucht werden, von denen die Druckwerte auf den Gaußpunkt interpoliert werden. Am Fluid-Struktur Interface wird also mit drei verschiedenen Gittern gearbeitet: einem Gitter mit den Fluidknoten, einem Gitter mit den Gaußpunkten und einem Gitter mit den Strukturknoten am Rand (vgl. Abbildung 3.3).

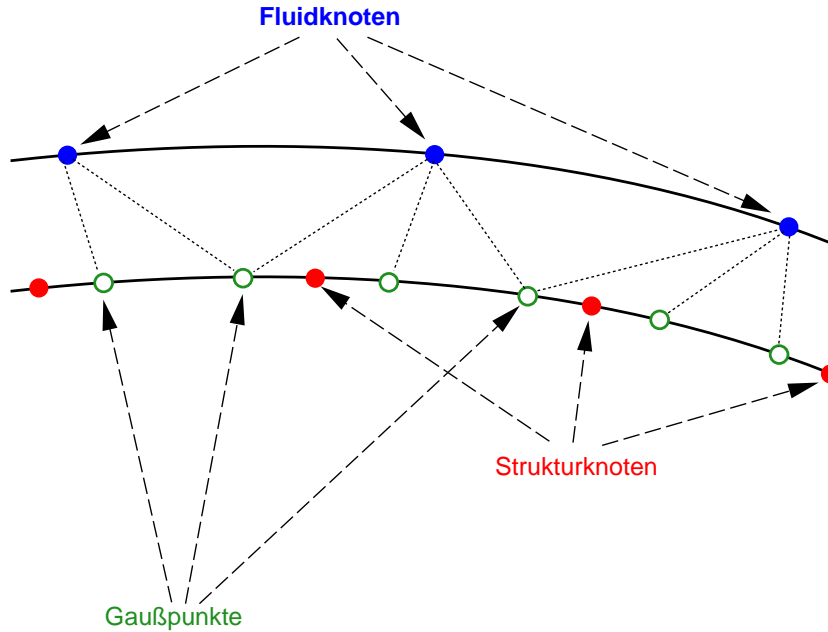


Abbildung 3.3: Verschiedene Gitter am Rand der Struktur

Für die Energie- und Impulserhaltung im System ist es notwendig, daß die Arbeiten der Fluid- und Strukturkräfte, die auf dem Interface Γ berechnet werden, gleich groß sind. Aufgrund der inkompatiblen Gitter am Fluid-Struktur Interface und der Verwendung von unterschiedlichen Diskretisierungstechniken erfüllen die meisten Interpolationstechniken diese Eigenschaft nicht, sie sind also nicht konservativ. Dieses ist insbesondere dann oft der Fall, wenn die Gitter am Interface unterschiedlich fein sind [CL97]. Trotzdem werden diese Algorithmen aufgrund ihrer Robustheit häufig eingesetzt, und es ist für zahlreiche aeroelastische Beispiele gezeigt worden [FLL98], [FLS97], daß das beschriebene konsistente Interpolationsverfahren gut funktioniert. Bei diesem Verfahren handelt es sich um einen lokalen Ansatz zur Bestimmung der Fluidlasten, da nur benachbarte Fluidelemente verwendet werden. Im folgenden soll eine globale Variante vorgestellt werden.

2. Konservativer Projektionsalgorithmus (Mortar-Element Methode, [CL97]):

Bei dieser Methode ist das Hauptziel die Erhaltung der Lasten, die am Fluid-Struktur Interface Γ wirken:

$$\int_{\Gamma} \sigma_h^s \cdot n \, ds = \int_{\Gamma} \sigma_h^f \cdot n \, ds. \quad (3.55)$$

Dafür wird die Methode der gewichteten Residuen mit den Lagrange-Multiplikatoren λ verwendet:

$$\int_{\Gamma} \lambda \cdot (\tau_h^s - \tau_h^f) \, ds = 0. \quad (3.56)$$

In (3.56) bezeichnen $\tau_h^s = \sigma_h^s \cdot n$ bzw. $\tau_h^f = \sigma_h^f \cdot n$ die raumdiskreten Spannungsvektoren der Struktur bzw. des Fluides am Interface Γ . Im allgemeinen werden die Spannungsvektoren im Fluid und in der Struktur durch unterschiedliche Formfunktionen L_j^f und L_k^s approximiert, wie es in den vorhergehenden Abschnitten auch beschrieben wurde:

$$\tau_h^f = \sum_j L_j^f \tau_j^f, \quad \tau_h^s = \sum_k L_k^s \tau_k^s. \quad (3.57)$$

Hierbei sind τ_j^f bzw. τ_k^s die Knotenwerte der Spannungsvektoren in den entsprechenden Elementen. Wenn die Formfunktionen L_i^s als Wichtungsfunktionen λ_i gewählt werden, dann erhält man wieder eine Mortar-Element Methode, und für jeden Lasttransfer ist das lineare Gleichungssystem

$$M^\gamma \tau_h^s = f^\gamma \quad (3.58)$$

mit der Massenmatrix

$$M_{ik}^\gamma = \int_{\Gamma} L_i^s L_k^s \, ds, \quad (3.59)$$

die mit den Ansatzfunktionen der Struktur für die Spannungen – eingeschränkt auf den Rand Γ – berechnet wird, und der rechten Seite f^γ mit

$$f_i^\gamma = \int_{\Gamma} L_i^s \sum_j L_j^f \tau_j^f \, ds \quad (3.60)$$

zu lösen. Dabei besteht noch das Problem, das Integral (3.60) zu berechnen. Dieses kann analog zu der konsistenten Interpolationsmethode für den Geometrietransfer mit einer Gaußschen Quadraturformel erfolgen. Diese Approximation erfüllt aufgrund des Ansatzes das Gleichgewicht der Kräfte in (3.55) [CL97].

3. Ein weiteres konservatives Verfahren ist in [FLL98] entwickelt worden. In diesem Ansatz wird die virtuelle Arbeit der Fluidkräfte, die auf Γ verrichtet wird, mit der virtuellen Arbeit der Finite Elemente Strukturkräfte auf Γ verglichen. Dieses resultiert in einem Ausdruck für die Knotenkräfte f_i der Struktur, der nur von der

Diskretisierungsmethode in dem Fluidlöser und der Approximation der Fluidoberfläche mit Hilfe der Strukturverschiebungen (wie bei der Behandlung des Geometrietransfers beschrieben) abhängt. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß man nicht in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen muß. Dafür müssen allerdings wieder die Interpolationstechniken, die im ersten Teilpunkt vorgestellt wurden, angewendet werden.

Wir haben bei unseren Anwendungen die konsistente Interpolationsmethode verwendet, wobei die Aufgabe der richtigen Zuordnung der Knoten zueinander („Matching of the Grids“) und die Interpolation der Größen des einen Gitters auf das andere von dem Kopplungsinterface *GRISLi* übernommen wird. In unseren Beispielen werden die Fluid- und Strukturgitter etwa gleich fein diskretisiert, so daß die konsistente Interpolationsmethode vernünftige Ergebnisse liefert. Der Einsatz von konservativen Verfahren ist meistens nur dann notwendig, wenn die Gitter im Fluid und in der Struktur unterschiedlich fein diskretisiert sind (z.B. bei adaptiven Verfahren) oder in der Strömung Druckstöße vorhanden sind, die durch den Lasttransfer nicht korrekt auf die Struktur übertragen werden [CL97].

3.5 Das gesamte diskrete Problem

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die partiellen Differentialgleichungen, die die Fluid- und Strukturmechanik beschreiben, räumlich und zeitlich diskretisiert und die Lösung der diskreten Teilprobleme beschrieben. Außerdem wurde die diskrete Form der Kopplungsbedingungen formuliert und die Probleme untersucht, die durch die unterschiedlichen räumlichen Diskretisierungsverfahren der Teilprobleme entstehen können. In diesem Abschnitt soll das gesamte diskrete gekoppelte Problem, das die Wechselwirkung von Fluid und Struktur beschreibt, noch einmal kompakt vorgestellt werden. Dazu werden wir zum einen die Systeme von differential-algebraischen Gleichungen, die die Fluidmechanik, die Bewegung des Fluidnetzes, die Strukturmechanik und die algebraischen Kopplungsbedingungen beschreiben, zusammenfassen. Zum anderen werden die diskreten Teilprobleme und die vorhandenen (iterativen) Löser für die diskreten Teilprobleme in einer abstrakten Form dargestellt, so daß auf dieser Grundlage die Kopplungsalgorithmen formuliert werden können.

Die Formulierung der Fluid-Struktur Interaktionsprobleme kann entweder als Zweifeldproblem oder als Dreifeldproblem erfolgen, bei dem die Bewegung des Fluidnetzes als drittes Teilproblem betrachtet wird. Wir wählen hier die erste Darstellung und integrieren die Netzbewegung in den Fluidlöser, so daß in diesem die gesamte Dynamik des Fluidproblems berechnet wird. Die Kopplungsterme der Struktur (Verschiebungen und Geschwindigkeiten) sind daher implizit durch die Netzbewegung und aufgrund der kine-

matischen Kopplungsbedingungen in den Fluidgleichungen enthalten, die Kopplungsterme des Fluides gehen explizit in die rechte Seite der Strukturgleichungen ein.

Die Dynamik des Fluidproblems wird zusammen mit der Bewegung des Fluidnetzes durch das folgende System von differential-algebraischen Gleichungen beschrieben:

$$M_f \dot{V} + N_f(V - \dot{X})V + B_f P + K_f V = G + D_f \tau \quad (3.61)$$

$$B_f^t V = 0 \quad (3.62)$$

$$\tilde{K} X = \tilde{D} U \quad (3.63)$$

$$T_f V = T_s \dot{U}. \quad (3.64)$$

Hierbei sind T_f und T_s die Transfermatrizen, die die Geschwindigkeiten auf dem Interface Γ berechnen, und D_f und D_s die Transfermatrizen, die die Randspannungen τ am Interface bestimmen. Die Fluidodynamik läßt sich also als ein System von Differentialgleichungen mit algebraischen Nebenbedingungen, in denen die kinematischen Kopplungsbedingungen integriert sind, formulieren. Die Randspannungen τ treten bei dieser Formulierung auch in den Fluidgleichungen als äußere Kräfte auf. Bei der Berechnung mit partitionierten Verfahren werden die dynamischen Kopplungsbedingungen allerdings nur der Struktur zugeordnet.

Analog erhält man für das Strukturproblem das System

$$M_s \ddot{U} + C_s \dot{U} + K_s(U) = F + D_s \tau, \quad (3.65)$$

in der sich die rechte Seite aus den äußeren Strukturkräften F und den Fluidkräften, die hier durch $D_s \tau$ gekennzeichnet werden, zusammensetzt. Die jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen für die Teilprobleme werden zur Vereinfachung weggelassen.

Als nächstes sollen die diskreten Teilprobleme, die nach der zeitlichen Diskretisierung der Differential-Algebraischen Systeme entstehen, in einer abstrakten Formulierung dargestellt werden. Im Zeitschritt t_{n+1} müssen die diskreten Fluidgleichungen

$$N(V_{n+1}, P_{n+1}, U_{n+1}, W_{n+1}) = 0 \quad (3.66)$$

in dem Fluidgebiet Ω_{n+1} zur Zeit t_{n+1} und die diskreten Strukturgleichungen

$$S(U_{n+1}, W_{n+1}) = F_{n+1} + D_s \tau_{n+1} \quad (3.67)$$

im Strukturgebiet Ω_s gelöst werden. In den Gleichungen (3.66) und (3.67) werden dabei nur die Variablen zum Zeitpunkt t_{n+1} explizit aufgeführt, alle anderen Größen (äußere Kräfte und Lasten, Werte der Lösungsvariablen aus dem vorhergehenden Zeitschritt t_n , etc.) werden als bekannt vorausgesetzt und sind implizit in diesen Gleichungen enthalten. In den Fluidgleichungen (3.66) ist der direkte Einfluß der Verschiebungen U_{n+1} und der Geschwindigkeiten W_{n+1} der Struktur am Interface zum Zeitlevel t_{n+1} zu erkennen. Das

diskrete Fluidproblem (3.66) besteht sowohl aus den diskreten Navier-Stokes Gleichungen als auch aus den Gleichungen für die Netzbewegung. Die Netzbewegung hängt dabei von den Verschiebungen U_{n+1} ab, so daß die Variablen X_{n+1} und \dot{X}_{n+1} nicht mehr explizit auftreten. Die Wirkung der Fluidkräfte auf die Struktur ist auf der rechten Seite von (3.67) als $D_s \tau_{n+1}$ zu finden. Es wird hier also eine vollkommen implizite Formulierung verwendet, die bei der iterativen Lösung durch entsprechende Kopplungsalgorithmen berücksichtigt werden muß.

Im folgenden setzen wir voraus, daß wir für jedes der Teilprobleme (3.66) und (3.67) einen Löser zur Verfügung haben. Weiter gehen wir davon aus, daß die Löser für die Teilprobleme iterativ sind und wir die Iterationen als Fixpunktgleichungen schreiben können. (Wenn einer der Löser direkt ist, so kann er als ein sehr effizienter iterativer Löser angesehen werden, der nur eine Iteration bis zur Konvergenz benötigt.) Für die Fluidgleichungen (3.66) erhält man

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, \tilde{U}_{n+1}, \tilde{W}_{n+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

und für die Strukturgleichungen (3.67)

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(\tilde{V}_{n+1}, \tilde{P}_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.69)$$

wobei k der Iterationsindex ist. Die Variablen des jeweiligen anderen Problems nehmen nicht an der Iteration teil und sind deshalb mit einer Tilde gekennzeichnet. Sie werden während der Iteration als konstant festgehalten.

Mit Hilfe der iterativen Löser (3.68) und (3.69) sollen jetzt die stark gekoppelten Gleichungen (3.66) und (3.67) gelöst werden. Dazu werden im nächsten Kapitel Kopplungsalgorithmen entwickelt und auf ihre Eigenschaften untersucht.

Kapitel 4

Kopplungsalgorithmen für partitionierte Verfahren

In diesem Kapitel werden verschiedene Kopplungsalgorithmen zur Lösung des stark gekoppelten Problems der Fluid-Struktur Interaktion vorgestellt und auf ihre Eigenschaften untersucht. Da wir in dieser Arbeit partitionierte Verfahren und damit verschiedene Löser für die Teilprobleme einsetzen wollen, müssen Algorithmen entwickelt werden, wie diese Löser miteinander gekoppelt werden. Im allgemeinen unterscheidet man dabei zwischen schwach gekoppelten Lösungsverfahren, die häufig auch als gestaffelte Verfahren („Staggered Methods“, [FL00]) bezeichnet werden, und stark gekoppelten Algorithmen, bei denen es sich meistens um iterative Verfahren handelt (daher auch oft die Bezeichnung „Iterative Staggered Methods“, [MS00]). Die stark gekoppelten Lösungsverfahren führen auf die gleiche Lösung wie die monolithischen Verfahren [Blo98], bei denen das gekoppelte Problem als ein Gesamtsystem betrachtet und gelöst wird.

Die gestaffelten Verfahren heißen schwach gekoppelt, weil bei ihnen nur jeweils ein Informationsaustausch in jede Richtung und in jedem Zeitschritt stattfindet und das Fluid- bzw. Strukturproblem nur einmal pro Zeitschritt gelöst wird. Dieser Informationsaustausch kann dabei am Anfang des Zeitschrittes stattfinden, so daß die Teilprobleme anschließend parallel berechnet werden können, oder es kann erst die Lösung eines Teilproblems mit den Kopplungsgrößen aus dem letzten Zeitschritt und danach die Lösung des anderen Teilproblems mit den Kopplungsvariablen aus dem aktuellen Zeitschritt berechnet werden. Bei dem zweiten Ansatz handelt es sich offensichtlich um einen sequentiellen Algorithmus, der in den meisten Fällen im Vergleich zur Referenzlösung genauere Ergebnisse als der erste Ansatz liefert, da zumindestens für das eine Teilproblem die aktuellen Kopplungsgrößen verwendet werden. Wir werden die wichtigsten gestaffelten Verfahren im ersten Abschnitt vorstellen und auf verschiedene Varianten bzw. Verbesserungsmöglichkeiten dieser Algorithmen genauer eingehen.

Für die schwach gekoppelten Lösungsverfahren ist aufgrund der Zeitversetzung relativ ein-

fach zu erkennen, daß die Kopplungsbedingungen im aktuellen Zeitschritt nicht erfüllt werden. Daher müssen aus Stabilitäts- und Genauigkeitsgründen für diese Verfahren relativ kleine Zeitschritte gewählt werden [MMV98b]. Die gestaffelten Verfahren können auch als explizite Verfahren angesehen werden, da in jedem Zeitschritt das Fluid- und das Strukturproblem nur einmal berechnet werden. Um größere Zeitschrittweiten verwenden zu können, müssen implizite Kopplungsalgorithmen eingesetzt werden, die auch als stark gekoppelte Lösungsverfahren bezeichnet werden. Bei diesen Verfahren werden die Kopplungsbedingungen in jedem Zeitschritt dadurch erfüllt, daß die Löser für die Teilprobleme iterativ miteinander verknüpft werden. Der Vorteil dieser Verfahren besteht darin, daß sie ein größeres Stabilitätsgebiet als die gestaffelten Verfahren besitzen und daher größere Zeitschritte erlauben. Als ein Nachteil ergibt sich der erhöhte numerische Aufwand in jedem Zeitschritt. Im zweiten Abschnitt werden einfache Möglichkeiten für die iterative Lösung mit einem stark gekoppelten Verfahren aufgezeigt. Dabei handelt es sich im wesentlichen um Block-Gauß-Seidel Verfahren, die in vielen Fällen eine große Anzahl an Iterationen erfordern. Daher werden effizientere iterative Verfahren benötigt. Wir werden im dritten Abschnitt als Alternative ein neues Iterationsverfahren vorstellen, das auf Block-Newton Verfahren aufbaut. Dabei handelt es sich um ein approximatives Block-Newton Verfahren, bei dem die Ableitungen durch die iterativen Löser approximiert werden.

Wir werden die Kopplungsalgorithmen in diesem Kapitel auf ein eindimensionales Modellbeispiel [Pip94] anwenden, um dadurch die Eigenschaften dieser Algorithmen zu veranschaulichen. Eine detaillierte Beschreibung des eindimensionalen Modellbeispiels befindet sich in Anhang A. Dieses Modellbeispiel wird in vielen Fällen dazu verwendet, neu entwickelte Kopplungsalgorithmen numerisch zu untersuchen [PFL95], [Blo98]. Daher wird es hier auch als ein erstes Anwendungsbeispiel für die approximativen Block-Newton Verfahren eingesetzt.

4.1 Schwach gekoppelte Algorithmen

Die schwach gekoppelten Algorithmen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: in die sequentiellen und die parallelen Verfahren. Die erste Gruppe, die sequentiellen Algorithmen, werden in der Literatur häufig auch als gestaffelte Verfahren („Staggered Methods“) bezeichnet. Den Grund für diese Bezeichnung kann man in der Abbildung 4.1 erkennen. Wir werden im folgenden als erstes auf die sequentiellen gestaffelten Verfahren und deren Eigenschaften genauer eingehen, bevor die parallelen Kopplungsalgorithmen besprochen werden.

4.1.1 Gestaffelte Verfahren

Wir wollen als erstes das einfachste gestaffelte Verfahren zur Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur mit partitionierten Verfahren vorstellen, das in der Literatur auch häufig unter der Bezeichnung konventionelles Verfahren zu finden ist [Far97]. Dazu setzen wir voraus, daß die Geschwindigkeiten V_n und Druckwerte P_n des Fluides und die Verschiebungen U_n und Geschwindigkeiten W_n der Struktur zum Zeitpunkt t_n bekannt sind. Das konventionelle gestaffelte Verfahren für den Zeitschritt $n + 1$ besteht dann aus den folgenden Schritten:

1. Aktualisiere das Interface Γ_{n+1} und das Fluidgitter zum Zeitpunkt t_{n+1} entsprechend den Verschiebungen U_n . Dazu wird der im letzten Kapitel beschriebene pseudo-stationäre Netzbewegungsalgorithmus eingesetzt. Die Gittergeschwindigkeiten \dot{X}_{n+1} , die in der ALE-Formulierung des Fluides benötigt werden, werden gemäß dem geometrischen Erhaltungsgesetz ermittelt.
2. Berechne die neuen Strömungsgeschwindigkeiten V_{n+1} und die Druckwerte P_{n+1} mit den kinematischen Randbedingungen $V_{n+1} = W_n$ auf dem Interface Γ_{n+1} . Für die Bestimmung der Randgeschwindigkeiten in den Fluidknoten werden die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Algorithmen verwendet.
3. Bestimme die Strukturlast F_{n+1} aus den Werten des Spannungstensors σ_{n+1}^f in den entsprechenden Gaußpunkten der Strukturelemente. Hierzu werden die Transfer-techniken aus dem letzten Kapitel herangezogen.
4. Berechne die Strukturverschiebungen U_{n+1} und die Strukturgeschwindigkeiten W_{n+1} aufgrund dieser Last.

Die einzelnen Schritte dieses gestaffelten Verfahrens werden in der Abbildung 4.1 dargestellt. Mit F_n werden die Variablen des Fluides und mit S_n die Größen der Struktur zum Zeitpunkt t_n bezeichnet. Dabei werden die Schritte 1. bis 4. in einem in sich geschlossenen Algorithmus abgebildet, die dem Datenfluß entsprechen. Die Zeitabhängigkeit der Kopplungsgrößen sieht anders aus, da die Fluidvariablen F_{n+1} mit den Kopplungsvariablen S_n aus dem Zeitschritt vorher berechnet werden. Es existieren in der Literatur daher auch andere Darstellungsformen der gestaffelten Verfahren, die die wirkliche Zeitabhängigkeiten in den jeweiligen Schritten zeigen. Diese Darstellungsweise wird in der Abbildung 4.2 gezeigt. Wir werden in dieser Arbeit die erste Darstellungsform verwenden, in der der algorithmische Aspekt stärker betont wird.

Das konventionelle gestaffelte Verfahren läßt sich mit Hilfe der iterativen Löser für die Teilprobleme, die im letzten Abschnitt vorgestellt wurden, abstrakt wie in Abbildung 4.3 dargestellt formulieren. Dabei wird in den beiden Lösungsschritten bis zu einer Konvergenz

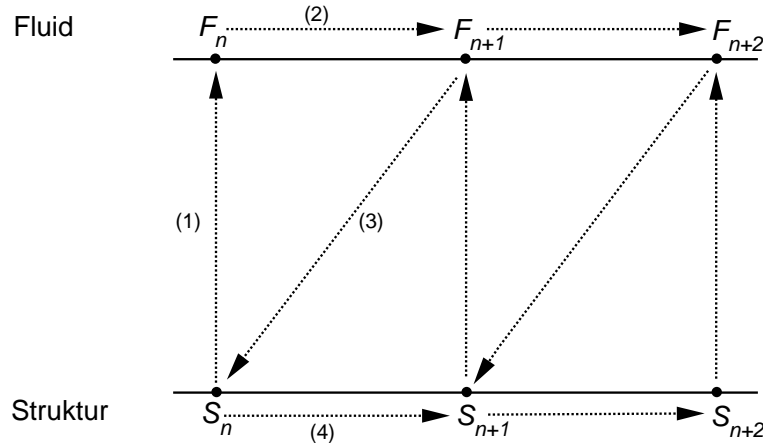


Abbildung 4.1: Konventionelles gestaffeltes Verfahren (Datenfluß)

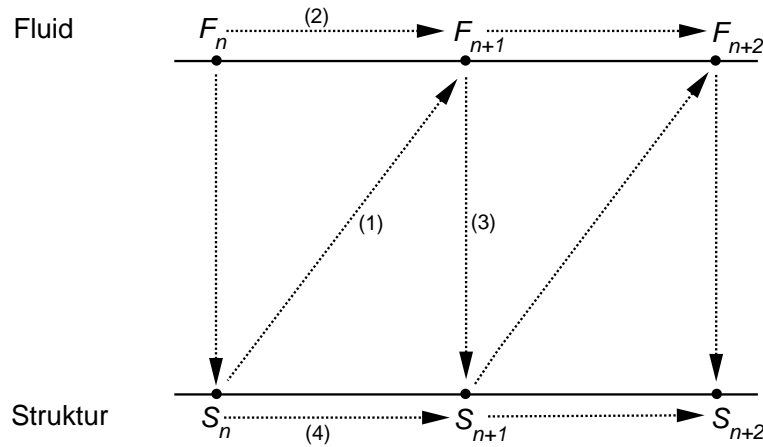


Abbildung 4.2: Zeitabhängigkeiten bei gestaffelten Verfahren

der Teilprobleme iteriert, um die Kopplungsgrößen möglichst genau zu approximieren. Das einfache gestaffelte Verfahren kann daher als ein Schritt in einer Block-Gauß-Seidel Iteration betrachtet werden.

Es ist offensichtlich, daß bei den gestaffelten Verfahren die Kopplungsbedingungen auf dem Interface Γ_{n+1} zur Zeit t_{n+1} nicht erfüllt sind. So kann man feststellen, daß zum einen die Position Γ_{n+1} des Interfaces nicht mit den Verschiebungen U_{n+1} übereinstimmt und zum anderen die kinematischen Kopplungsbedingungen $V_{n+1} = W_{n+1}$ nicht erfüllt sind. Die dynamischen Kopplungsbedingungen $\sigma_{n+1}^f \cdot n = \sigma_{n+1}^s \cdot n$ auf dem Interface Γ_{n+1} gelten zwar aufgrund der Konstruktion des Verfahrens, allerdings werden die Fluidkräfte nicht in der Konfiguration Ω_{n+1} , die zu den Verschiebungen U_{n+1} gehört, berechnet. Diese

1. Löse die Fluidgleichungen durch die Iteration

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, U_n, W_n), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Löse die Strukturgleichungen iterativ durch

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(V_{n+1}, P_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Abbildung 4.3: *Abstrakte Form des konventionellen gestaffelten Verfahrens*

Reihenfolge der Staffellung der Teilprobleme führt also auf ein raumdiskontinuierliches Verfahren [FL00], da die Position des Interfaces Γ_{n+1} nicht mit den Verschiebungen U_{n+1} übereinstimmt und damit die kinematischen Kopplungsbedingungen nicht gelten.

Eine andere Möglichkeit für die Staffellung der Teillöser besteht darin, die Reihenfolge bei der Berechnung der Teilprobleme zu ändern: So kann als erstes die Struktur mit den Fluidkräften aus dem letzten Zeitschritt und anschließend das Fluid auf dem aktualisierten Fluidgebiet Ω_{n+1} mit den Randbedingungen $V_{n+1} = W_{n+1}$ berechnet werden. Dadurch erhält man ein raumkontinuierliches Verfahren, das zwar die kinematischen Kopplungsbedingungen (Verschiebungen und Geschwindigkeiten am Interface stimmen zum Zeitpunkt t_{n+1} überein), aber nicht die dynamischen Kopplungsbedingungen (Gleichgewicht der Kräfte am Interface) erfüllt. Aufgrund dieses Kräfteungleichgewichts wird diese Variante nur sehr selten eingesetzt. Insbesondere besitzt diese Variante ein kleineres Stabilitätsgebiet [Pip97], [Pip94]. Dieses Phänomen wird in dem Analyseabschnitt über die stark gekoppelten Lösungsverfahren (Block-Gauß-Seidel Iteration) eingehender untersucht.

Für das konventionelle gestaffelte Verfahren kann durch eine Taylor-Entwicklung der diskreten Fluid- und Strukturgleichungen (3.66) und (3.67) um den Zeitpunkt t_n gezeigt werden, daß es in der Zeit nur von erster Ordnung genau ist, obwohl für die Teilprobleme Zeitschrittverfahren von zweiter Ordnung verwendet werden. Dieses liegt im wesentlichen an dem Zeitversatz bei der Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen (Verwendung der Strukturgrößen aus dem vorhergehenden Zeitschritt). Aus Genauigkeitsgründen müssen daher die Teilprobleme nicht bis zur vollen Konvergenz iteriert werden, sondern es würden jeweils einige Iterationen der Teillöser ausreichen. Außerdem sind die gestaffelten Verfah-

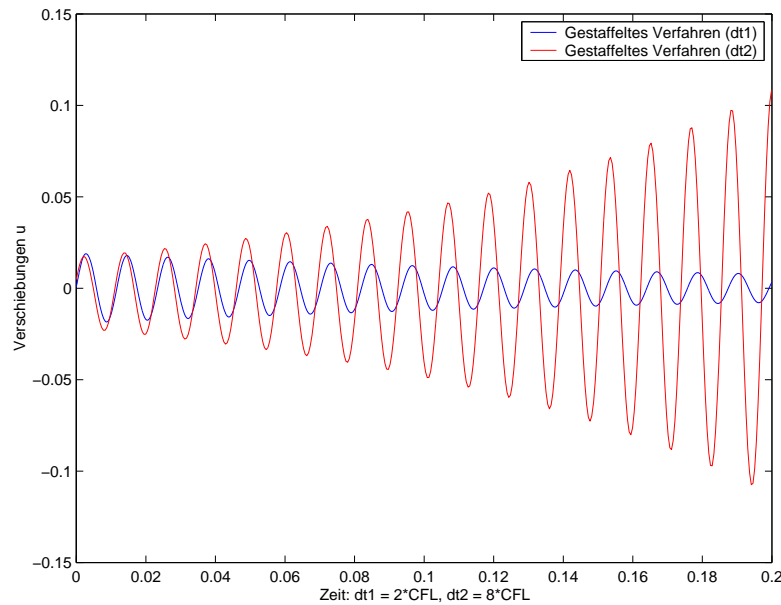


Abbildung 4.4: *Instabilität des gestaffelten Verfahrens*

ren nicht absolut stabil, auch wenn die Zeitintegrationsverfahren, die in den Teillösern eingesetzt werden, absolut stabil sind. Das Ziel sollte jedoch sein, ein gesamtes numerisches Verfahren mit möglichst hoher Genauigkeitsordnung und großem Stabilitätsgebiet zu erhalten. Die Untersuchung der Stabilität von gestaffelten bzw. partitionierten Verfahren ist ein sehr komplexes Problem, das bis jetzt noch nicht vollständig gelöst ist. Es existieren zwar einige Aussagen zur Stabilität der gestaffelten Verfahren [PF83], [PF84], [ZC89], [PFL95], allerdings beziehen sich diese Aussagen meistens auf stark vereinfachte Modellprobleme, die die volle Komplexität der hier betrachteten Fluid-Struktur Interaktionsprobleme nicht enthalten. Daher können diese Aussagen nicht ohne weiteres auf die stark gekoppelten Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung übertragen werden, die wir in dieser Arbeit untersuchen.

Die Lösung des eindimensionalen Modellbeispiels mit dem konventionellen gestaffelten Verfahren wird in der Abbildung 4.4 dargestellt. Anhand dieses Beispiels kann man auch erkennen, daß die gestaffelten Verfahren nicht absolut stabil sind. Dazu wird eine große Schrittweite $\Delta t = 8 * CFL$ gewählt, für die die Lösung instabil wird. Dieses Phänomen wird in Abbildung 4.4 gezeigt. Daher müssen bei der Verwendung von großen Zeitschrittweiten (d.h. ein Vielfaches der CFL -Zahl) aus Stabilitätsgründen stark gekoppelte Lösungsverfahren verwendet werden.

4.1.2 Subcycling im Fluid

Im Fluid und in der Struktur existieren sehr oft unterschiedliche Zeitcharakteristiken. Bei sehr vielen Anwendungen benötigen die Fluidgleichungen kleinere Zeitschrittweiten als die Strukturgleichungen, für die größere Schrittweiten erlaubt sind. Daher ist es in vielen Fällen sinnvoll, die Lösung des Fluidproblems mit kleineren Schrittweiten zu berechnen. Dieses wird als Subcycling im Fluid bezeichnet [Pip97]. Der umgekehrte Weg ist natürlich auch möglich: Falls in der Struktur – z.B. aufgrund von starken Nichtlinearitäten – kleinere Zeitschrittweiten als im Fluid notwendig sind, so kann man auch Subcycling in der Struktur einsetzen. Dieser Fall ist allerdings für die Problemklasse, die in dieser Arbeit betrachtet wird, wesentlich seltener anzutreffen. Ein wichtiges Kriterium beim Subcycling in einem Teillöser ist, daß ein Informationsaustausch der Kopplungsvariablen zu bestimmten Kopplungszeitpunkten durchgeführt werden muß. Als Zeitschrittweite für den Kopplungsalgorithmus wird daher die Schrittweite des anderen Teillösers gewählt. In der Abbildung 4.5 ist ein Subcycling im Fluidproblem zu sehen, wobei der Informationsaustausch zu den entsprechenden Zeitschritten des Strukturlösers durchgeführt wird.

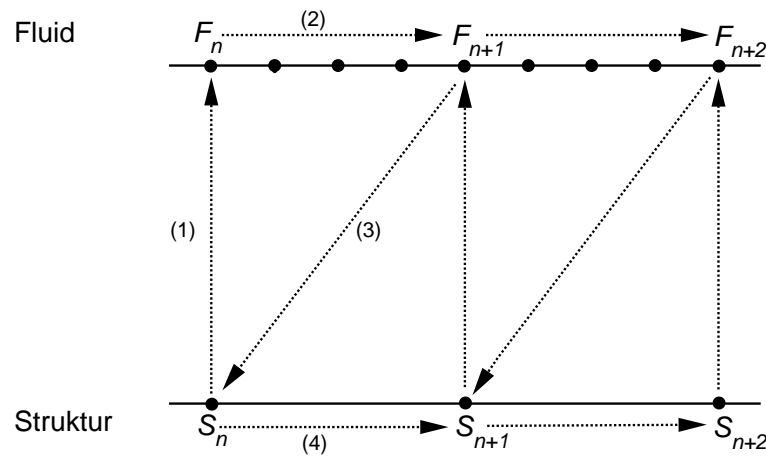


Abbildung 4.5: *Gestaffeltes Verfahren mit Subcycling im Fluid*

Bei partitionierten Verfahren stellt der Einsatz von Subcycling-Techniken kein Problem dar, da die Teilprobleme mit separaten Lösern berechnet werden, die verschiedene Zeitschrittweiten benutzen können. Das Subcycling im Fluid bietet die folgenden Vorteile:

- Für den Kopplungsalgorithmus können insgesamt größere Zeitschritte verwendet werden, so daß sich die Zeit für die gesamte Berechnung verringert, weil das Strukturproblem nicht mehr so häufig gelöst werden muß.
- Es sind weniger Kommunikationsschritte notwendig, da zwischen den Teillösern die Information über die Kopplungsgrößen seltener ausgetauscht werden muß.

Der Einsatz von Subcycling im Fluid erfordert allerdings einige besondere Maßnahmen, damit das gestaffelte Verfahren nicht numerisch instabil wird [PFL95], [Pip97]:

- Die Bewegung des Interfaces in jedem Zeitschritt des Kopplungsalgorithmus sollte auf die Teilschritte des Subcyclings durch geeignete (z.B. lineare) Interpolation verteilt werden.
- Die Fluidkräfte, die zum Zeitpunkt t_{n+1} zu der Struktur transferriert werden, sollten als ein Mittelwert der Fluidkräfte berechnet werden, die während des Subcyclings in den jeweiligen Teilschritten auftreten, und nicht nur aufgrund des letzten Wertes des Spannungstensors σ_{n+1}^f zur Zeit t_{n+1} .

Die Subcycling-Techniken werden häufig dann eingesetzt, wenn für die Zeitintegration der Fluidgleichungen explizite Verfahren verwendet werden. Dieses liegt daran, daß aus Stabilitätsgründen für das Fluid sehr kleine Zeitschrittweiten gewählt werden müssen, die für die Stabilität des gestaffelten Verfahrens nicht notwendig sind. Wenn das Fluidproblem mit einem impliziten Zeitschrittverfahren integriert wird, so werden meistens keine Subcycling-Schritte benötigt. Wir setzen in dieser Arbeit daher auch keine Subcycling-Techniken ein. Außerdem wird in dem Zwischenschritt- θ -Verfahren aufgrund der Zwischenschritte bereits eine Art von Subcycling durchgeführt.

4.1.3 Extrapolation der Strukturvariablen

Eine wichtige Erweiterung des konventionellen gestaffelten Verfahrens besteht in der Verwendung eines Prädiktors für die Strukturgrößen im Zeitschritt t_{n+1} . So kann der konventionelle gestaffelte Algorithmus durch eine Extrapolation der Strukturverschiebungen und -geschwindigkeiten am Interface für den nächsten Zeitschritt verbessert werden [Pip97]. Die Extrapolation \tilde{U}_{n+1} für die Verschiebungen U_{n+1} kann allgemein als

$$\tilde{U}_{n+1} = U_n + \alpha \Delta t W_n + \beta \Delta t (W_n - W_{n-1}) \quad (4.1)$$

mit den Parametern α und β gewählt werden, wobei Δt die Zeitschrittweite des Strukturlösers ist. Der Prädiktor (4.1) ist zum Beispiel für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ von erster und für $\alpha = 1$ und $\beta = \frac{1}{2}$ von zweiter Ordnung genau, wie man anhand einer Taylor-Entwicklung von U_{n+1} um den Zeitpunkt t_n leicht erkennen kann. Wählt man $\alpha = \beta = 0$, so erhält man wieder das konventionelle gestaffelte Verfahren (bzw. einen Prädiktor nullter Ordnung). Eine weitere Möglichkeit für die Wahl der Extrapolation \tilde{U}_{n+1} ergibt sich dadurch, daß man in der Struktur einen ganzen Zeitschritt mit der Fluidlast berechnet, die man aufgrund der Werte des Spannungstensors σ_n^f zum Zeitpunkt t_n erhält [PF97]. Diese Wahl des Prädiktors ist allerdings sehr aufwendig und wird daher bei gestaffelten Verfahren nur

1. Löse die Fluidgleichungen iterativ durch

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, \tilde{U}_{n+1}, \tilde{W}_{n+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Löse die Strukturgleichungen durch die Iteration

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(V_{n+1}, P_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Abbildung 4.6: *Abstrakte Form des gestaffelten Verfahrens mit Extrapolation*

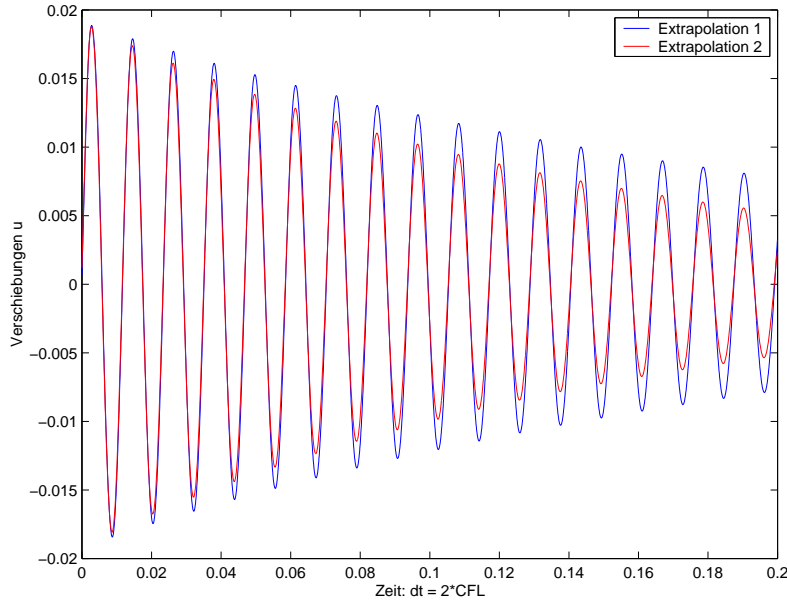
selten eingesetzt. Wir verwenden in dieser Arbeit immer den einfachsten Prädiktor erster Ordnung ($\alpha = 1, \beta = 0$).

Eine Extrapolation für die Geschwindigkeiten W_{n+1} kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden wie in (4.1). Eine alternative Möglichkeit für diese Extrapolation besteht in der Verwendung des Prädiktors \tilde{U}_{n+1} für die Verschiebungen U_{n+1} :

$$\tilde{W}_{n+1} = \frac{\tilde{U}_{n+1} - U_n}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Die Extrapolation der Strukturverschiebungen und -geschwindigkeiten erhöht sowohl die Genauigkeit als auch die Stabilität des gestaffelten Verfahrens [Pip97], wie auch in der Abbildung 4.7 zu erkennen ist. Hier wurden in dem eindimensionalen Modellbeispiel zum einen nur die Strukturdaten aus dem Zeitschritt t_n und zum anderen ein Prädiktor erster Ordnung verwendet. Dabei ist klar zu erkennen, daß der Prädiktor erster Ordnung wesentlich bessere Ergebnisse liefert als der Prädiktor des konventionellen gestaffelten Verfahren. Eine genaue Analyse des Einflusses, die der Extrapolationsschritt für die Strukturgrößen auf die partitionierten Verfahren bewirkt, wird im nächsten Abschnitt über die stark gekoppelten Lösungsverfahren durchgeführt (Block-Gauß-Seidel Iteration).

In der abstrakten Formulierung stellt sich dieses verbesserte gestaffelte Verfahren wie in Abbildung 4.6 dar. Der erste Schritt im konventionellen gestaffelten Verfahren wird dabei um diesen Extrapolationsschritt erweitert.

Abbildung 4.7: *Einfluß der Extrapolation*

4.1.4 Energieerhaltung

Die Erhaltung der Energie im Gesamtsystem spielt eine wichtige Rolle bei der Entwicklung von effizienten partitionierten Verfahren, da sie sehr eng mit der Stabilität des numerischen Verfahrens zusammenhängt [PF97], [ML01]. Das gekoppelte Problem, das aus dem Fluid- und Strukturproblem besteht, ist ein geschlossenes System. Es sollte daher keine künstliche Energie produziert und dissipiert werden. Die Energie, die von der Struktur erzeugt oder absorbiert wird (ausgenommen die von der Strukturdämpfung), sollte gleich der Energie sein, die im Fluid aufgenommen oder produziert wird (abgesehen von den viskosen Effekten des Fluides). Die Energieerhaltung des partitionierten Verfahrens kann daher als eine wichtige Forderung betrachtet werden [LM01]. Für die gestaffelten Verfahren kann man relativ einfach zeigen, daß sie nicht energieerhaltend sind. Die Änderung der Energie entspricht der Arbeit der äußeren Kräfte am Fluid-Struktur Interface. Daher vergleicht man die Arbeit der Fluidkräfte am Interface

$$E_{n+1}^f = \int_{\Gamma_{n+1}} V_{n+1} \cdot \sigma_{n+1}^f \cdot n \, ds = \int_{\Gamma_{n+1}} \tilde{W}_{n+1} \cdot \sigma_{n+1}^f \cdot n \, ds \quad (4.3)$$

mit der entsprechenden Arbeit der Strukturkräfte am Fluid-Struktur-Rand

$$E_{n+1}^s = \int_{\Gamma_{n+1}} W_{n+1} \cdot \sigma_{n+1}^s \cdot n \, ds = \int_{\Gamma_{n+1}} W_{n+1} \cdot \sigma_{n+1}^f \cdot n \, ds. \quad (4.4)$$

Die Randspannungen σ_{n+1}^f und σ_{n+1}^s stimmen aufgrund der gewählten Reihenfolge am Interface überein, wohingegen \tilde{W}_{n+1} eine der beschriebenen Extrapolationen der Strukturgeschwindigkeiten für den Zeitpunkt t_{n+1} ist und daher in den meisten Fällen nicht mit den exakten Geschwindigkeiten W_{n+1} übereinstimmen wird. Die Energie, die durch die Fluidkräfte in der Struktur erzeugt wird, gleicht also die Energie, die das Fluid am Interface aufnimmt, nicht aus. Der Einfluß der Extrapolation der Strukturverschiebungen U_{n+1} und Strukturgeschwindigkeiten W_{n+1} auf die Energieerhaltung des Gesamtsystems werden anhand eines einfachen Beispiels in [PF97], [Pip97] ausführlich diskutiert. Wenn die diskreten Kopplungsbedingungen in jedem Zeitschritt erfüllt sind, dann erhält man ein energieerhaltendes partitioniertes Verfahren, wie anhand der Gleichungen (4.3) bzw. (4.4) zu erkennen ist. Um die Kopplungsbedingungen zu erfüllen, werden iterative gestaffelte Verfahren („Iterative Staggered Methods“) eingesetzt, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

In diesem Zusammenhang soll erwähnt werden, daß auch die Verfahren zum Last- und Geometrietransfer einen Einfluß auf die Energieerhaltung im System haben, da durch den Transfer der Kopplungsgrößen Fehler entstehen können, die eine Produktion von künstlicher Energie ermöglichen. Daher sind energieerhaltende Algorithmen zum Transfer der Lasten und Geschwindigkeiten ebenfalls von Bedeutung für die Energieerhaltung im Gesamtsystem [CL97]. Allerdings ist der Einfluß der Transferalgorithmen auf die Energieerhaltung im Gesamtsystem nicht allzu groß im Vergleich mit dem Einfluß des Zeitversatzes bei den gestaffelten Verfahren, wie in numerischen Rechnungen an Modellbeispielen gezeigt wurde [FLL98].

4.1.5 Parallele Kopplungsalgorithmen

Die Komplexität der Fluid-Struktur Interaktionsprobleme erfordert oft eine parallele Berechnung dieser Probleme [RJW⁺99], [Far97]. Dabei kann man zwischen der räumlichen Parallelität in den jeweiligen Teilproblemen und der physikalischen Parallelität des gekoppelten Problems unterscheiden. Partitionierte Verfahren unterstützen auf natürliche Weise die parallele Berechnung des gekoppelten Problems, da die Teilprobleme in jedem Zeitschritt unabhängig voneinander gelöst werden können, nachdem die Kopplungsgrößen ausgetauscht wurden. Dieses wird als physikalische Zerlegung bzw. Parallelität des gekoppelten Problems bezeichnet. Die räumliche Zerlegung bzw. Parallelität des Mehrfeldproblems bedeutet, daß jedes Teilproblem mit einem parallelen Algorithmus berechnet werden kann, der zum Beispiel auf Gebietszerlegungsverfahren beruht. Für diesen Ansatz sind partitionierte Verfahren auch geeignet, da sie den Einsatz von parallelen Lösern für die Teilprobleme erlauben. Wir werden in diesem Abschnitt nur die physikalische Parallelität betrachten. Wie wir im letzten Teilabschnitt gesehen haben, handelt es sich bei den gestaffelten Verfahren um serielle Algorithmen, da zuerst das Fluid und dann

die Struktur berechnet wird (oder umgekehrt). Daher müssen die gestaffelten Verfahren modifiziert werden, um eine effiziente Berechnung des gekoppelten Problems auf einem Parallelrechner zu ermöglichen.

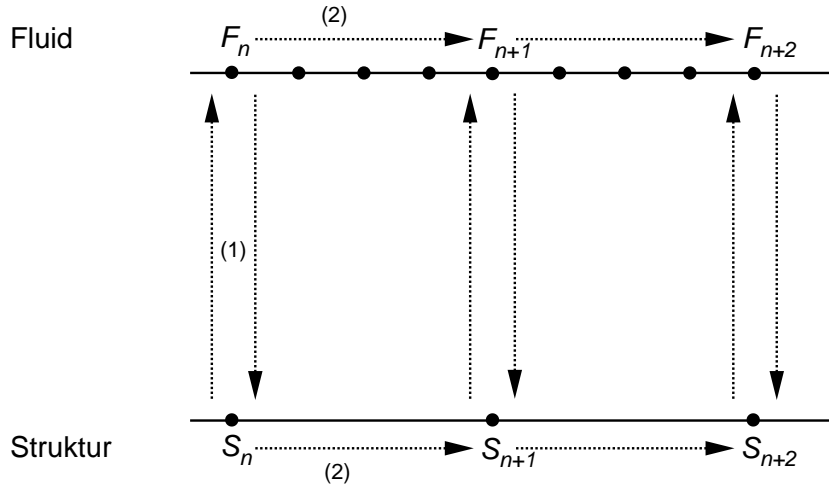


Abbildung 4.8: *Einfacher paralleler Kopplungsalgorithmus*

Als erstes stellen wir einen einfachen parallelen Kopplungsalgorithmus vor, der eine parallele Version des gestaffelten Verfahrens aus dem vorhergehenden Abschnitt ist und in Abbildung 4.8 dargestellt wird. Der einfache parallele Kopplungsalgorithmus besteht aus den folgenden zwei Teilschritten:

1. Der Fluid- und Strukturlöser tauschen zu Beginn jedes Zeitschrittes die Kopplungsgrößen aus. Das Fluid erhält die Verschiebungen U_n und Geschwindigkeiten W_n in den Randknoten der Struktur zum Zeitpunkt t_n und kann damit das Fluidgitter für den nächsten Zeitschritt aktualisieren und die entsprechenden Randbedingungen für die Fluidgeschwindigkeiten setzen. Die Struktur bekommt die Werte des Spannungstensors σ_n^f zur Zeit t_n und kann dadurch die Fluidkräfte bestimmen, die auf die Struktur wirken.
2. Im zweiten Schritt werden das Fluid- und Strukturproblem gleichzeitig mit den ausgetauschten Kopplungsgrößen berechnet, so daß man neue Fluid- und Strukturvariablen zur Zeit t_{n+1} erhält. Die Berechnung des Fluides und der Struktur kann dabei unabhängig voneinander und daher parallel erfolgen (s. Abbildung 4.8).

In beiden Schritten des parallelen Algorithmus können die in den vorhergehenden Teilschritten erläuterten Techniken – Subcycling im Fluid und Extrapolation der Strukturvariablen für den nächsten Zeitschritt – verwendet werden. Dieser einfache parallele

Kopplungsalgorithmus kann als ein Schritt in einer Block-Jakobi-Iteration des voll gekoppelten Problems gesehen werden und läßt sich daher abstrakt wie in Abbildung 4.9 dargestellt formulieren.

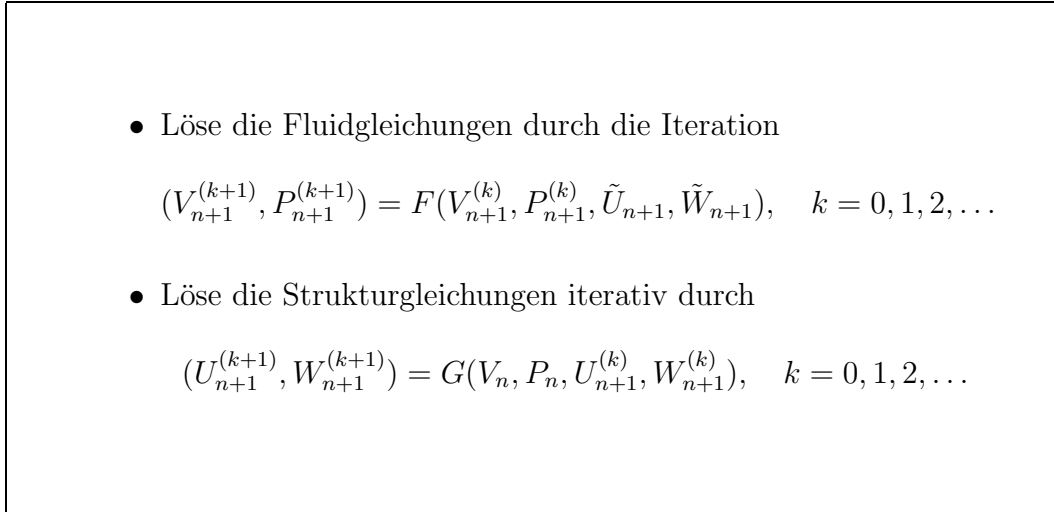


Abbildung 4.9: *Abstrakte Form des einfachen parallelen Kopplungsalgorithmus*

Dieser parallele Kopplungsalgorithmus ist wie das konventionelle gestaffelte Verfahren ebenfalls von erster Ordnung genau, allerdings können dabei zusätzliche Fehler in den Fluid- und Strukturantworten auftreten. Diese entstehen aufgrund der Tatsache, daß für die Berechnung der Teilprobleme jeweils die Kopplungsgrößen zum Zeitpunkt t_n verwendet werden, was eine Zeitverschiebung bei der Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen bedeutet. Dieses kann man auch anhand des eindimensionalen Modellbeispiels in Abbildung 4.10 erkennen, in der der einfache parallele Kopplungsalgorithmus mit dem konventionellen gestaffelten Verfahren verglichen wird. Als Zeitschrittweite wurde hier wieder $dt = 2 * CFL$ gewählt, eine Extrapolation der Strukturdaten wurde nicht verwendet.

Der einfache parallele Kopplungsalgorithmus kann dadurch verbessert werden, daß eine zusätzliche Kommunikation in der Mitte des Zeitschrittes von t_n zu t_{n+1} eingeführt wird. Dieses verbesserte parallele Verfahren läßt sich folgendermaßen formulieren:

1. Zu Beginn jedes Zeitschrittes tauschen der Fluid- und Strukturlöser die entsprechenden Kopplungsvariablen aus. Mit den Verschiebungen U_n und den Geschwindigkeiten W_n der Struktur zum Zeitschritt t_n (bzw. den entsprechenden Extrapolationen) wird das Fluidgitter für den folgenden halben Zeitschritt angepasst und die Randbedingungen im Fluid gesetzt. In der Struktur werden die Lasten mit Hilfe der Fluidspannungen σ_n^f am Interface berechnet.

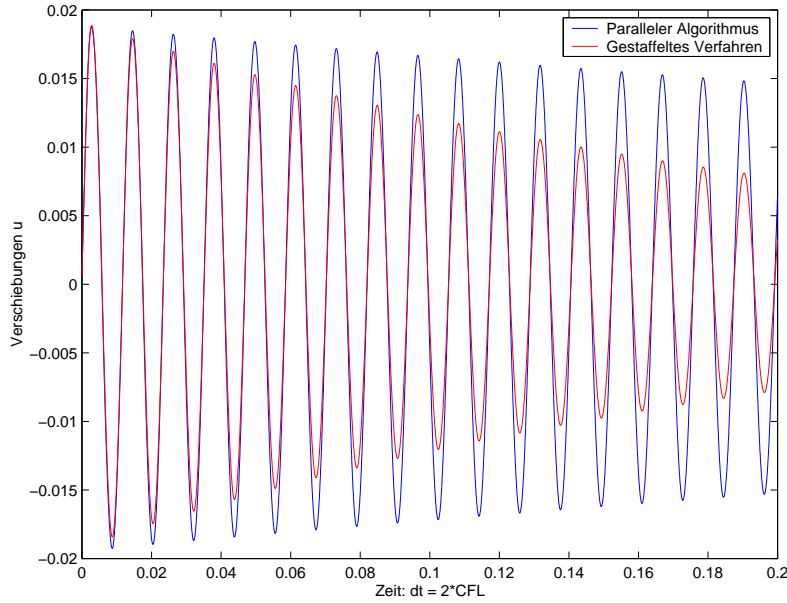


Abbildung 4.10: Vergleich des parallelen Kopplungsalgorithmus mit gestaffeltem Verfahren

2. Im zweiten Schritt werden die Druckwerte $P_{n+\frac{1}{2}}$ und Fluidgeschwindigkeiten $V_{n+\frac{1}{2}}$ auf dem extrapolierten Fluidgebiet $\Omega_{n+\frac{1}{2}}$ zum Zeitpunkt $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{1}{2}\Delta t$ bestimmt. Die Struktur wird dagegen mit einem ganzen Zeitschritt Δt berechnet, so daß man Verschiebungen \tilde{U}_{n+1} und Geschwindigkeiten \tilde{W}_{n+1} zur Zeit t_{n+1} erhält.
3. Die Struktur schickt dem Fluid die berechneten Verschiebungen \tilde{U}_{n+1} und Geschwindigkeiten \tilde{W}_{n+1} , so daß diese Strukturinformationen für den nächsten halben Zeitschritt verwendet werden können. Der Strukturlöser empfängt die Fluidspannungen $\sigma_{n+\frac{1}{2}}^f$ in den entsprechenden Gaußknoten am Rand und berechnet daraus eine neue Strukturlast für den gesamten Zeitschritt Δt .
4. Die Geschwindigkeiten V_{n+1} und die Druckwerte P_{n+1} des Fluides zum Zeitpunkt t_{n+1} werden auf dem aktualisierten Fluidgebiet Ω_{n+1} bestimmt, wobei zum Zeitpunkt $t_{n+\frac{1}{2}}$ gestartet wird. Parallel dazu wird die Struktur mit der Last aus dem dritten Schritt neu berechnet. Dabei wird vom Zeitpunkt t_n ausgegangen und der volle Zeitschritt Δt verwendet. Die erste Berechnung der Strukturvariablen zum Zeitpunkt $t_{n+\frac{1}{2}}$ kann daher als ein Prädiktorschritt gesehen werden, wohingegen die zweite Berechnung als ein Korrektorschritt betrachtet werden kann.

Die einzelnen Schritte des verbesserten parallelen Kopplungsalgorithmus werden in der Abbildung 4.11 dargestellt. Bei dem gerade beschriebenen verbesserten parallelen Verfah-

ren können das Fluid- und Strukturproblem immer noch parallel berechnet werden. Allerdings werden zusätzliche Kopplungszeitpunkte in jedem Zeitschritt hinzugefügt, so daß die Informationen über die Werte der Kopplungsgrößen in jedem Teillöser aktueller sind. In dem verbesserten parallelen Algorithmus geschieht dieses durch die Kommunikation zum Zeitpunkt $t_{n+\frac{1}{2}}$. Dieses verbesserte Verfahren, das auch als eine Art Prädiktor-Korrektor Verfahren interpretiert werden kann, wird daher als ein erster Schritt in Richtung starke Kopplung gesehen.

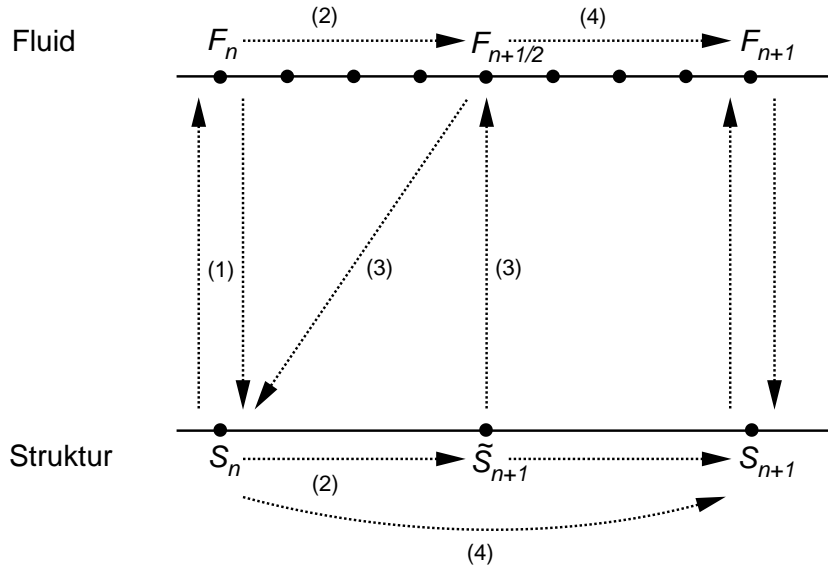


Abbildung 4.11: *Verbesserter paralleler Kopplungsalgorithmus*

Der verbesserte parallele Kopplungsalgorithmus ist ebenfalls von erster Ordnung genau, jedoch werden die zusätzlichen Fehler des einfachen parallelen Algorithmus deutlich verkleinert [FLM95]. Die wesentlichen Kosten für diese Reduktion bestehen in dem zusätzlichen Kommunikationsschritt des Kopplungsalgorithmus. Wir haben in dieser Arbeit bei dem zweiten Anwendungsbeispiel den einfachen parallelen Kopplungsalgorithmus eingesetzt und diesen mit einem gestaffelten und verschiedenen stark gekoppelten Verfahren verglichen.

4.2 Starke Kopplung der Teillöser

Bei den schwach gekoppelten Verfahren haben wir gesehen, daß die Kopplungsbedingungen auf dem Interface Γ_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} nicht erfüllt sind. Außerdem werden die Position des Interfaces und das aktuelle Fluidgitter nicht den Verschiebungen U_{n+1} entsprechend berechnet. Um die Kopplungsbedingungen auf dem Interface Γ_{n+1} zur Zeit t_{n+1} zu erfüllen, müssen die Löser für die Teilprobleme iterativ miteinander gekoppelt werden.

Dieses bezeichnet man auch als eine starke Kopplung der Teillöser.

Die gestaffelten Verfahren können als explizite Verfahren betrachtet werden, da das Fluid, die Struktur und das Fluidgitter nur einmal in jedem Zeitschritt berechnet werden. Die Einführung von Prädiktor- und Korrektorschritten – wie bei dem verbesserten parallelen Kopplungsalgorithmus – kann als ein erster Schritt in Richtung stark gekoppelte Lösungsverfahren angesehen werden. Bei diesen Verfahren werden in jedem Zeitschritt Iterationen dazu eingesetzt, um die Kopplungsbedingungen auf dem Interface Γ_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} zu erfüllen. Ein stark gekoppeltes Verfahren behandelt die Kopplungsbedingungen und die Position des Interfaces also implizit, wodurch die Stabilität und Energieerhaltung der partitionierten Verfahren verbessert wird [ML01].

4.2.1 Semi-implizite Kopplungsalgorithmen

Als erstes sollen die Iterationen nur dazu eingesetzt werden, um die Kopplungsbedingungen auf dem Interface Γ_{n+1} zu erfüllen. Die Position des Interfaces Γ_{n+1} wird dabei explizit behandelt. Dieses bedeutet, daß das Interface Γ_{n+1} und das Fluidgitter zum Zeitpunkt t_{n+1} nur im ersten Iterationsschritt aufgrund einer Extrapolation der Strukturverschiebungen neu berechnet wird. Dadurch müssen die Netzbewegung und die Fluidmatrizen nicht in jedem Iterationsschritt neu, sondern nur einmal vor dem ersten Iterationsschritt berechnet werden. Dieser Algorithmus kann daher als ein semi-implizites partitioniertes Verfahren [Gra98] betrachtet und durch das folgende iterative Verfahren realisiert werden:

1. Bestimme eine Extrapolation der Verschiebungen \tilde{U}_{n+1} und Geschwindigkeiten \tilde{W}_{n+1} zur Zeit t_{n+1} und aktualisiere das Interface Γ_{n+1} und das Fluidgitter damit so, daß es zu den extrapolierten Verschiebungen \tilde{U}_{n+1} paßt. Setze $i = 1$ und $W_{n+1}^{(i-1)} = \tilde{W}_{n+1}$.
2. Berechne neue Geschwindigkeiten $V_{n+1}^{(i)}$ und Druckwerte $P_{n+1}^{(i)}$ des Fluides zum Zeitpunkt t_{n+1} mit den kinematischen Randbedingungen $V_{n+1}^{(i)} = W_{n+1}^{(i-1)}$ auf Γ_{n+1} .
3. Ermittle aufgrund der Werte des Spannungstensors σ_{n+1}^f am Interface eine Strukturlast F_{n+1} .
4. Berechne die Struktur mit der im dritten Schritt bestimmten Last und erhalte so neue Verschiebungen $U_{n+1}^{(i)}$ und Geschwindigkeiten $W_{n+1}^{(i)}$ der Struktur.
5. Überprüfe die Konvergenz des Kopplungsalgorithmus:

$$\|V_{n+1}^{(i)} - W_{n+1}^{(i)}\|_{\Gamma_{n+1}} < \epsilon.$$

Wenn die Konvergenzbedingung erfüllt ist, dann gehe zum nächsten Zeitschritt; anderenfalls erhöhe i um eins und gehe zu Schritt 2.

1. Berechne \tilde{U}_{n+1} und \tilde{W}_{n+1} und aktualisiere Γ_{n+1} und das Fluidgitter.

2. Löse die Fluidgleichungen durch die Iteration

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, \tilde{U}_{n+1}, \tilde{W}_{n+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. Löse die Strukturgleichungen iterativ durch

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(V_{n+1}, P_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Konvergenztest:

- Nicht konvergent: Setze $\tilde{U}_{n+1} = U_{n+1}$ und $\tilde{W}_{n+1} = W_{n+1}$ und gehe zu 2.
- Andernfalls: gehe zum nächsten Zeitschritt.

Abbildung 4.12: *Abstrakte Form des semi-impliziten Kopplungsalgorithmus*

Dieser Algorithmus kann ebenfalls in der Abbildung 4.5 verdeutlicht werden, wenn man die Schritte (2), (3) und (4) so lange wiederholt, bis die kinematischen Kopplungsbedingungen in Schritt (5) erfüllt sind. Die dynamischen Kopplungsbedingungen für die Spannungen gelten wegen der gewählten Reihenfolge der Berechnung von Fluid und Struktur. In der abstrakten Formulierung mit den iterativen Lösern für die Teilprobleme wird dieses Verfahren in Abbildung 4.12 gezeigt. Der semi-implizite Kopplungsalgorithmus kann dabei als eine Block-Gauß-Seidel Iteration für die Fluid- und Strukturvariablen (nicht für das Interface) interpretiert werden. In den Schritten 2 und 3 der Abbildung 4.12 wird dabei im allgemeinen bis zur vollen Konvergenz iteriert (d.h. bis zu einer vorgegebenen Fehlerschranke, z.B. $\epsilon = 10^{-4}$). Alternativ dazu besteht auch die Möglichkeit, nur einige Iterationen der Teillöser in jedem Iterationsschritt der Block-Gauß-Seidel Iteration durchzuführen. Die Konvergenz des Block-Gauß-Seidel Verfahrens und deren Abhängigkeit von der Iterationsanzahl in den Teilproblemen ist hierbei sehr stark von dem zu untersuchenden nichtlinearen Problem und von der Größe des Zeitschrittes abhängig [CC96],

[MMV99a].

Eine genaue mathematische Untersuchung dieses semi-impliziten partitionierten Verfahren ist für nichtlineare Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung noch nicht durchgeführt worden. In [Gra98] ist für ein vereinfachtes eindimensionales Modellbeispiel (s. auch Anhang A) gezeigt worden, daß das semi-implizite Iterationsverfahren konsistent und stabil und damit auch konvergent ist. Zum Beweis dieser Aussage werden die Konsistenzeigenschaften des Verfahrens untersucht und Abschätzungen der diskreten Energie des gekoppelten Problems durchgeführt [Gra98].

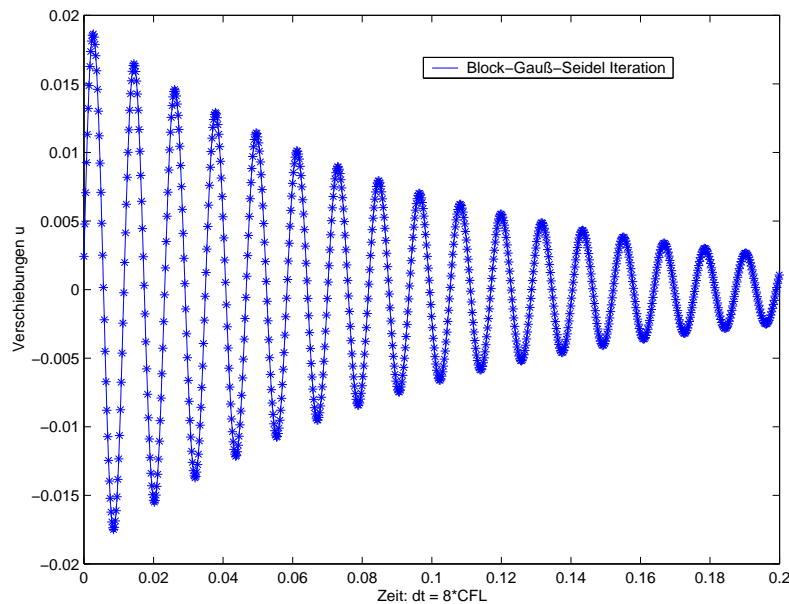


Abbildung 4.13: *Lösung mit Block-Gauß-Seidel Verfahren*

Wenn diese Block-Gauß-Seidel Iteration auf das eindimensionale Modellbeispiel angewendet wird (mit der gleichen Zeitschrittweite $\Delta t = 8 \cdot CFL$ wie beim gestaffelten Verfahren), so sieht man in Abbildung 4.13 wieder eine stabile Lösung des Systems. In Abbildung 4.18 werden die Anzahl der Iterationen für den semi-impliziten Kopplungsalgorithmus gezeigt, in Abbildung 4.19 die Anzahl der Aufrufe der iterativen Löser, wobei in jedem Iterationsschritt des Block-Gauß-Seidel Verfahrens durchschnittlich fünf Iterationen des Fluidlösers (wegen der relativ großen Schrittweite im Fluidlöser und aufgrund einer relativ hohen Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-5}$) und eine Iteration (d.h. eine direkte Lösung des linearen Problems) für das Strukturproblem verwendet werden. Diese Abbildungen befinden sich am Ende dieses Kapitels, da dort die Block-Gauß-Seidel Iteration mit den neu entwickelten Kopplungsalgorithmen verglichen werden.

4.2.2 Voll implizite Kopplungsalgorithmen

Bei dem semi-impliziten gekoppelten Lösungsverfahren ist die Position des Interfaces zur Zeit t_{n+1} kein Bestandteil des Kopplungsalgorithmus, sondern es findet nur eine Extrapolation vor der ersten Iteration statt. Wenn auch das Interface Γ_{n+1} als Teil des Kopplungsalgorithmus betrachtet wird, dann erhält man den folgenden Relaxationsalgorithmus [ML01] für den Zeitschritt $n + 1$:

1. Extrapoliere den neuen Rand Γ_{n+1} des Fluidgebietes Ω_{n+1}^f durch

$$\tilde{\Gamma}_{n+1} = \Gamma_n + \alpha \Delta t W_n + \beta \Delta t W_{n-1}.$$

2. Bestimme eine Extrapolation der Randgeschwindigkeiten für diesen Zeitschritt:

$$\tilde{W}_{n+1} = \frac{\tilde{\Gamma}_{n+1} - \Gamma_n}{\Delta t}.$$

3. Aktualisiere das Fluidgitter so, daß es zu dem Fluidgebiet Ω_{n+1}^f mit dem Interface $\tilde{\Gamma}_{n+1}$ paßt.
4. Löse das Fluidproblem auf der aktualisierten Konfiguration mit kinematischen Randbedingungen für die Geschwindigkeiten: $V_{n+1} = \tilde{W}_{n+1}$.
5. Berechne aus den Fluidspannungen σ_{n+1}^f eine Strukturlast F_{n+1} .
6. Löse das Strukturproblem mit den berechneten Fluidkräften F_{n+1} und bestimme so die aktuelle Position Γ_{n+1} des Interfaces.
7. Aktualisiere die Interfaceposition $\tilde{\Gamma}_{n+1}$ durch Relaxation mit dem Parameter ω_n :

$$\tilde{\Gamma}_{n+1} = (1 - \omega_n) \tilde{\Gamma}_{n+1} + \omega_n \Gamma_{n+1}. \quad (4.5)$$

8. Überprüfe die Konvergenz: Wenn der Algorithmus nicht konvergiert ist, dann gehe zurück zu Schritt 2. Ansonsten berechne den nächsten Zeitschritt.

Dieser Relaxationsalgorithmus ist ein vollkommen implizites Verfahren, bei dem sowohl die Kopplungsbedingungen als auch die Interfaceposition in jedem Zeitschritt iterativ behandelt werden. In [ML01] und [LM01] wird dieser voll implizite Kopplungsalgorithmus auf seine mathematischen Eigenschaften untersucht. Es wird dort die Energieerhaltung dieses Verfahrens nachgewiesen, indem die totale Variation der Energie betrachtet wird (vgl. mit Abschnitt 4.1.4) und gezeigt wird, daß die Energie absolut und gleichmäßig in der Zeit beschränkt ist [LM01]. Für eine mathematische Analyse des Relaxationsalgorithmus

wird in [ML01] das linearisierte stark gekoppelte Problem untersucht und die Relaxation des Interfaces (4.5) in jedem Zeitschritt als

$$\tilde{\Gamma}_{n+1} = \tilde{\Gamma}_{n+1} - \omega_n S_s^{-1} \left((S_f + S_s) \Gamma_{n+1} - \tilde{F}_{n+1} \right) \quad (4.6)$$

geschrieben. In (4.6) bezeichnen S_f und S_s dabei die jeweiligen Schurkomplement-Matrizen des Fluides und der Struktur und \tilde{F}_{n+1} die externe Last auf dem Interface zum Zeitpunkt t_{n+1} . Damit läßt sich der folgende Satz formulieren [ML01]:

Satz 1 (Mouro, LeTallec) *Für einen festen Relaxationsparameter ω konvergiert der beschriebene Relaxationsalgorithmus genau dann linear gegen die Lösung des linearisierten gekoppelten Problems zur Zeit t_{n+1} , wenn die Bedingung*

$$\omega \leq 2 \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}^2(A)} \quad (4.7)$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnen λ_{\min} bzw. λ_{\max} den kleinsten bzw. größten Eigenwert der Matrix A und es gilt

$$A = I + S_s^{-1/2} S_f S_s^{-1/2}.$$

Falls der Relaxationsparameter ω_n variabel gewählt werden soll, so kann er mit Hilfe der Methode des steilsten Abstieges (Gradientenverfahren) oder mit der Aitken-Methode berechnet werden [ML01], [MW01].

Bei dem Relaxationsalgorithmus handelt es sich immer noch um eine Block-Gauß-Seidel Iteration, bei der in jedem Iterationsschritt die Position des Interfaces relaxiert wird (s. Abbildung 4.14). Die Anzahl der Iterationen, die in den Lösern der Teilprobleme durchgeführt werden, hängt von den Charakteristiken des jeweiligen Teilproblems ab (Nichtlinearität, Steifheit, etc.). Im allgemeinen wird in den Teilproblemen bis zur vollen Konvergenz iteriert. Es existieren allerdings - wie bei dem semi-impliziten Kopplungsalgorithmus - auch Ansätze, bei denen nur einige Iterationsschritte bei den Teilproblemen eingesetzt werden.

Die vorgestellten stark gekoppelten Lösungsverfahren lassen sich natürlich auch mit einer Block-Jakobi-Iteration realisieren, wodurch wieder eine parallele Berechnung möglich ist. Wie jedoch von der iterativen Lösung von linearen Gleichungssystemen bekannt ist, konvergiert das Jakobi-Verfahren in den meisten Fällen wesentlich schlechter als das Gauß-Seidel Verfahren. Daher wird dieses nur selten zur starken Kopplung eingesetzt. Die Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften der Block-Gauß-Seidel Iteration sind bei der iterativen Lösung von linearen Gleichungssystemen sehr stark von der Konditionszahl der Matrizen, d.h. von der Kondition des Problems, oder auch der Reihenfolge der Iteration abhängig. Die gleiche Problematik ist bei der iterativen Lösung des stark gekoppelten Problems vorhanden, wie im nächsten Teilabschnitt genauer untersucht wird. Aus

1. Bestimme \tilde{U}_{n+1} und \tilde{W}_{n+1} . Aktualisiere das Interface $\tilde{\Gamma}_{n+1}$ und das Fluidgitter.

2. Löse die Fluidgleichungen durch die Iteration

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, \tilde{U}_{n+1}, \tilde{W}_{n+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. Löse die Strukturgleichungen iterativ durch

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(V_{n+1}, P_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Überprüfe die kinematischen Kopplungsbedingungen:

- Falls diese erfüllt sind, berechne den nächsten Zeitschritt.
- Andernfalls setze $\tilde{U}_{n+1} = U_{n+1}$, $\tilde{W}_{n+1} = W_{n+1}$, relaxiere das Interface durch

$$\tilde{\Gamma}_{n+1} = (1 - \omega_n)\tilde{\Gamma}_{n+1} + \omega_n\Gamma_{n+1},$$

aktualisiere das Fluidgitter und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 4.14: *Abstrakte Form des voll impliziten Kopplungsalgorithmus*

diesem Grund existiert eine Forderung nach effizienteren stark gekoppelten Lösungsverfahren zur Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur. Als Ansätze können dazu Newton-Raphson Verfahren oder Block-Newton Verfahren betrachtet werden, auf die wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen werden.

4.2.3 Analyse der stark gekoppelten Lösungsverfahren

Zur Analyse der stark gekoppelten Verfahren werden wir hier Methoden einsetzen, die in [Arn00] und [AG01] für die numerische Untersuchung von gekoppelten differential-algebraischen Systemen entwickelt und unter anderem auf mit elastischen Strukturen gekoppelte

Mehrkörpersysteme angewendet wurden [SA00], [VA99]. Dazu werden die Subsysteme allgemein als differential-algebraische Gleichungen formuliert, die durch eine zusätzliche algebraische Gleichung miteinander verknüpft sind. Zur Lösung dieser gekoppelten Differentialgleichungssysteme wird dann in jedem Zeitschritt eine dynamische Iteration (Waveform-Relaxation) durchgeführt [AG01], die einer Block-Gauß-Seidel Iteration entspricht [MN87]. Für diese dynamische Iteration werden in [Arn00] verschiedene Aussagen hergeleitet, die unter anderem die Konvergenz und Konsistenzordnung in der Zeit betreffen. Diese Aussagen werden im ersten Teilabschnitt für ein allgemeines System von gekoppelten differential-algebraischen Gleichungen vorgestellt.

Im zweiten Teilabschnitt werden wir das hier betrachtete Problem der Fluid-Struktur Wechselwirkung als ein derartiges gekoppeltes System von differential-algebraischen Gleichungen formulieren und anschließend zeigen, daß sich die in [Arn00] entwickelte Theorie auf diese Problemklasse anwenden läßt. Dadurch erhalten wir zum einen eine Konsistenzordnung des Block-Gauß-Seidel Verfahrens in der Zeit und zum anderen eine Aussage zur Konvergenz dieser Iteration. Insbesondere wird gezeigt, daß die Block-Gauß-Seidel Iteration nicht immer konvergieren muß.

Konvergenz der dynamischen Iteration

Als erstes sollen die Ergebnisse von Arnold et al. präsentiert werden. Dazu verwenden wir im wesentlichen die gleiche Notation wie in [Arn00] bzw. [AG01]. Die gekoppelten differential-algebraischen Systeme lassen sich als

$$\dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2, z_1) \quad (4.8)$$

$$0 = h_1(y_1, y_2, z_1, u) \quad (4.9)$$

und

$$\dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, z_2) \quad (4.10)$$

$$0 = h_2(y_1, y_2, z_2, u) \quad (4.11)$$

mit den algebraischen Kopplungsbedingungen

$$0 = g(y_1, y_2, z_1, z_2) \quad (4.12)$$

darstellen. Für diese Systeme wird angenommen, daß sie Index-1-Bedingungen erfüllen, d.h. die Jacobi-Matrizen

$$\frac{\partial h_i}{\partial z_i}, \begin{pmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial z_i} & \frac{\partial h_i}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z_i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

sind regulär. Durch diese Bedingung wird garantiert, daß die algebraischen Gleichungen $0 = h_i(y_1, y_2, z_i, u)$ für $i = 1, 2$ (lokal) eindeutig nach z_i und die Gleichungssysteme $0 =$

$h_i(y_1, y_2, z_i, u)$ und $0 = g(y, z)$ für $i = 1, 2$ (lokal) eindeutig nach z_i und u lösbar sind. Gesucht wird eine numerische Lösung

$$\tilde{y} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_y}, \quad \tilde{z} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_z}, \quad \tilde{u} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_u} \quad (4.14)$$

des gekoppelten Systems im Intervall $[0, T]$ mit den Anfangswerten

$$\tilde{y}(0) = y_0, \quad \tilde{z}(0) = z_0, \quad \tilde{u}(0) = u_0.$$

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die Lösung des Systems zum Zeitpunkt t_n bereits bekannt ist und eine Lösung für den nächsten Zeitschritt berechnet werden soll. Desweiteren wird angenommen, daß die numerischen Lösungen der Teilsysteme in jedem Zeitschritt mit stabilen und effizienten Zeitschrittverfahren berechnet werden können. Der Schwerpunkt in diesem Abschnitt liegt auf der Betrachtung der Kopplung der Subsysteme und der Analyse der dynamischen Iteration und nicht in der numerischen Integration der Teilsysteme. Die algebraischen Kopplungsbedingungen (4.12) können entweder dem ersten oder dem zweiten Teilsystem oder auch beiden Subsystemen zugeordnet werden. Wir werden hier nur diejenige Zuordnung präsentieren, die wir auch im nächsten Teilabschnitt auf die Probleme der Fluid-Struktur Interaktion anwenden werden. Hierbei werden die algebraischen Kopplungsbedingungen dem ersten Teilsystem hinzugefügt. Für die anderen Alternativen verweisen wir auf die Beschreibungen in [Arn00] und [AG01]. Die dynamische Iteration in einem Makro-Zeitschritt $[t_n, t_{n+1}]$ besteht aus den folgenden Schritten:

1. Extrapoliere die Größen

$$\tilde{y}_2 : [0, t_n] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_{y_2}} \quad \text{und} \quad \tilde{z}_2 : [0, t_n] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_{z_2}}$$

nach

$$y_2^{(0)} : [0, t_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_{y_2}} \quad \text{und} \quad z_2^{(0)} : [0, t_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^{n_{z_2}}$$

und setze $k = 1$.

2. Löse das erste Teilsystem

$$\dot{y}_1^{(k)} = f_1(y_1^{(k)}, y_2^{(k-1)}, z_1^{(k)}), \quad y_1^{(k)}(t_n) = \tilde{y}_1(t_n) \quad (4.15)$$

$$0 = h_1(y_1^{(k)}, y_2^{(k-1)}, z_1^{(k)}, u^{(k)}) \quad (4.16)$$

$$0 = g(y_1^{(k)}, y_2^{(k-1)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k-1)}) \quad (4.17)$$

3. Berechne eine Lösung des zweiten Subsystems

$$\dot{y}_2^{(k)} = f_2(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, z_2^{(k)}), \quad y_2^{(k)}(t_n) = \tilde{y}_2(t_n) \quad (4.18)$$

$$0 = h_2(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, z_2^{(k)}, u^{(k)}) \quad (4.19)$$

4. Untersuche die Iteration auf Konvergenz; erhöhe gegebenenfalls k um eins und gehe zu Schritt 2.

Der Gesamtfehler dieses Verfahrens wird wesentlich durch die Wahl der Startlösungen $y_2^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ und durch die Anzahl der Iterationen k_n in jedem Makro-Zeitschritt beeinflusst. Daher spielt die Extrapolation von \tilde{y}_2 bzw. \tilde{z}_2 hier eine große Rolle. Der Extrapolationsschritt kann kurz als

$$y_2^{(0)} = \Phi_n^y(\tilde{y}_2|_{(t_{n-1}, t_n]}) \quad \text{bzw.} \quad z_2^{(0)} = \Phi_n^z(\tilde{z}_2|_{(t_{n-1}, t_n]}) \quad (4.20)$$

mit den Operatoren Φ_n^y und Φ_n^z geschrieben werden. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Startlösungen $y_2^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ durch eine Extrapolation der Lösungen \tilde{y}_2 und \tilde{z}_2 vom Intervall $(t_{n-1}, t_n]$ in das Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ berechnet werden. Weiter wird angenommen, daß diese Extrapolation eine in $\|\cdot\|_\infty$ bezüglich $H := \Delta t > 0$ gleichmäßige Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L erfüllt. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Norm in \mathcal{L}_∞ . Die Extrapolationsfehler $\delta_n y$ und $\delta_n z$ werden dann dadurch definiert, daß die Operatoren Φ_n^y bzw. Φ_n^z auf die analytische Lösung y_2 bzw. z_2 des gekoppelten Problems angewendet werden:

$$\delta_n y := \|\Phi_n^y(y_2|_{(t_{n-1}, t_n]}) - y_2|_{[t_n, t_{n+1}]} \|_\infty, \quad \delta_n z := \|\Phi_n^z(z_2|_{(t_{n-1}, t_n]}) - z_2|_{[t_n, t_{n+1}]} \|_\infty. \quad (4.21)$$

Dieser Fehler hat zum Beispiel eine Ordnung $\delta_n y = \mathcal{O}(H^{q+1})$, wenn Φ_n^y durch ein Interpolationspolynom q -ten Grades gegeben wird.

In [AG01] wird anhand eines Modellbeispiels gezeigt, daß die dynamische Iteration für gekoppelte differential-algebraische Systeme divergieren kann. Die Konvergenz hängt von der Kontraktivitätsbedingung $\alpha < 1$ ab, wobei für die Konstante α in diesem Fall gilt:

$$\alpha := \max_{t \in [0, T]} \left\| \left[\left(\frac{\partial h_2}{\partial z_2} \right)^{-1} \frac{\partial h_2}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial z_1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial z_1} \right)^{-1} \frac{\partial h_1}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial z_2} \right] (y(t), z(t), u(t)) \right\|. \quad (4.22)$$

Mit dieser Definition läßt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 2 (Arnold [Arn00]) *Wenn die Kontraktivitätsbedingungen $\alpha < 1$ und $L\alpha^{k_n} < 1$ für alle $n \geq 0$ mit $nH \leq t_N = T$ erfüllt sind, dann ist die dynamische Iteration für $k_n \geq 1$ konvergent, und es existieren Konstanten $C_0, C_*, H_0 > 0$, so daß für alle $H \leq H_0$ die folgende Fehlerabschätzung gilt*

$$\|\tilde{y} - y\|_{[0, T]} + \|\tilde{z} - z\|_{[0, T]} + \|\tilde{u} - u\|_{[0, T]} \leq C_* \cdot \max_{0 \leq n \leq N} (\mu^{\max(0, k_n - 2)} \delta_n y + \mu^{k_n - 1} \delta_n z),$$

wobei die Konstante μ durch $\mu = \alpha + C_0 H / (\alpha + \sqrt{H})$ gegeben ist. Die Konstanten C_0, C_* und H_0 sind von der Kontraktionskonstanten α unabhängig.

- Bemerkung 1** 1. Wenn die Kontraktivitätsbedingungen nicht erfüllt sind (d.h. z. B. $\alpha > 1$), dann ist die Stabilität der dynamischen Iteration nicht garantiert und diese kann divergieren. Dieses wird in [AG01] anhand eines Beispiels demonstriert. Eine Möglichkeit zur Erfüllung der Kontraktivitätsbedingung besteht zum Beispiel in der Vertauschung der Iterationsreihenfolge oder in der Verwendung von Vorkonditionierern (s. [Arn00]). Das Block-Gauß-Seidel Verfahren muß also nicht immer konvergent sein und hängt von der Reihenfolge der Iteration und auch von der Zuordnung der algebraischen Kopplungsbedingungen (4.12) ab.
2. Für den Fall, daß die algebraischen Kopplungsbedingungen dem zweiten Teilsystem oder auch beiden Subsystemen zugeordnet werden, existieren analoge Aussagen wie in dem Satz von Arnold (vgl. dazu [AG01]). Der wesentliche Unterschied zwischen diesen verschiedenen Varianten besteht in der Kontraktionskonstanten α .
3. Bei einer numerischen Lösung der Anfangswertprobleme für die Subsysteme müssen die Diskretisierungsfehler aufgrund der Zeitschrittverfahren berücksichtigt werden. Dieses führt dazu, daß sich die Kontraktivitätskonstante aus $\alpha_H \cdot \alpha$ zusammensetzt, wobei α_H durch die zeitliche Diskretisierung bestimmt ist. Insgesamt erhält man in diesem Fall eine analoge Fehlerabschätzung wie im Satz von Arnold:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{y}_h - y\|_{[0,T]} + \|\tilde{z}_h - z\|_{[0,T]} + \|\tilde{u}_h - u\|_{[0,T]} \leq \\ & \tilde{C} \cdot \max_{0 \leq n \leq N} \left(\mu^{\max(0, k_n - 2)} \delta_n y + \mu^{k_n - 1} \delta_n z + \|\epsilon_{n,1}\| + \|\epsilon_{n,2}\| \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Hierbei sind $\epsilon_{n,i}$ die lokalen Diskretisierungsfehler der einzelnen Zeitschrittverfahren für die Teilsysteme im Makrozeitschritt $[t_{n-1}, t_n]$ und \tilde{y}_h , \tilde{z}_h und \tilde{u}_h die zeitdiskreten Lösungen des gekoppelten Systems.

4. Die Fehlerabschätzung in Satz 1 bzw. die diskrete Version (4.23) läßt sich folgendermaßen interpretieren: Wenn eine Extrapolation 1. Ordnung (z.B. durch eine lineare Extrapolation) gewählt wird und eine ausreichende Anzahl von Iterationen durchgeführt wird, um die zusätzliche Bedingung $L\alpha^{k_n} < 1$ zu erfüllen, dann erhält man mit der Block-Gauß-Seidel Iteration eine Fehler- bzw. Konsistenzordnung der Größe $\mathcal{O}(h^2)$ – unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die jeweiligen Zeitintegrationsverfahren ebenfalls (lokal) quadratisch konvergent sind. Im Vergleich zu den gestaffelten Verfahren besitzen die iterativen stark gekoppelten Lösungsverfahren also eine höhere Konsistenzordnung als diese.

Anwendung auf Probleme der Fluid-Struktur Interaktion

Im folgenden sollen die Aussagen, die im letzten Teilabschnitt vorgestellt wurden, auf die hier untersuchten Probleme der Fluid-Struktur Interaktion übertragen werden. Dazu

werden die differential-algebraischen Systeme, die die Fluid-, Netz- und Strukturmechanik beschreiben, als ein System von gekoppelten differential-algebraischen Gleichungen formuliert. Die Fluid- und Netzmechanik, die das erste Subsystem bilden, werden durch die folgenden differential-algebraischen Gleichungen gegeben:

$$M_f \dot{V} + N_f(V - \dot{X})V + B_f P + K_f V = G + D_f \tau, \quad (4.24)$$

$$B_f^t V = 0, \quad (4.25)$$

$$\tilde{K} X = \tilde{D} U. \quad (4.26)$$

Die Strukturmechanik wird durch das Differentialgleichungssystem

$$M_s \ddot{U} + C_s \dot{U} + K_s(U) = F + D_s \tau \quad (4.27)$$

dargestellt. Die algebraischen Kopplungsbedingungen, die die beiden Subsysteme miteinander verknüpfen, werden durch die kinematischen Kopplungsbedingungen

$$T_f V = T_s \dot{U} \quad (4.28)$$

gegeben, wobei T_f bzw. T_s die Transfermatrizen im Fluid bzw. in der Struktur sind, die die Geschwindigkeiten auf dem Interface Γ bestimmen. Die Randspannungen τ gehen bei dieser Formulierung sowohl im Fluid als auch in der Struktur als äußere Kräfte auf der rechten Seite ein. Bei den Matrizen D_f und D_s handelt es sich ebenfalls um Transfermatrizen zur Berechnung der Randspannungen. Die Subsysteme (4.24), (4.25), (4.26) und (4.27) sollen jetzt zusammen mit der Kopplungsbedingung (4.28) als ein gekoppeltes differential-algebraisches System formuliert werden, wie es im letzten Teilabschnitt vorgestellt wurde und für die Anwendung von Satz 2 benötigt wird. Dazu müssen die Teilsysteme so umgeschrieben werden, daß sie die Index-1-Bedingungen (4.13) erfüllen. Hierfür verwenden wir die gleiche Schreibweise wie im letzten Teilabschnitt:

1. Subsystem 1: Für das Fluidproblem werden die Variablen y_1, z_1, f_1 und u folgendermaßen definiert:

$$y_1 = \begin{pmatrix} V \\ X \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} B \\ P \\ \Xi \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} B \\ \Xi \end{pmatrix}, \quad u = \tau. \quad (4.29)$$

Die algebraische Gleichung wird durch

$$h_1(y_1, y_2, z_1, u) = \begin{pmatrix} M_f B + N_f(V - \Xi)V + B_f P + K_f V - G - D_f \tau \\ -B_f^t [M_f^{-1} (N_f(V - \Xi)V + B_f P + K_f V - G - D_f \tau)] \\ \tilde{K} \Xi - \tilde{D} W \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

gegeben. Die erste Gleichung entspricht der Differentialgleichung in den Navier-Stokes Gleichungen, und die zweite der Kontinuitätsgleichung, nachdem diese nach der Zeit abgeleitet und der Term für \dot{V} aus der Differentialgleichung eingesetzt wurde. Die dritte Gleichung entsteht aus der Netzbewegung. Die beiden ursprünglichen algebraischen Gleichungen werden dabei noch einmal abgeleitet, um die Index-1-Bedingungen (4.13) zu erfüllen.

2. Subsystem 2: Das Strukturproblem läßt sich relativ einfach in die vorgegebene Form bringen. Dazu werden

$$y_2 = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, \quad z_2 = A, \quad f_2 = \begin{pmatrix} W \\ A \end{pmatrix}, \quad u = \tau \quad (4.31)$$

und

$$h_2(y_1, y_2, z_2, u) = M_s A + C_s W + K_s(U) - F - D_s \tau \quad (4.32)$$

gesetzt.

3. Algebraische Gleichungen: Die Kopplungsbedingungen (4.12) werden nicht direkt in der Form (4.28) geschrieben, sondern die Gleichungen (4.28) werden noch einmal in der Zeit abgeleitet. Damit erhält man die Gleichung

$$g(y_1, y_2, z_1, z_2) = T_f B - T_s A = 0. \quad (4.33)$$

Nachdem die entsprechenden Größen für die beiden Subsysteme und die Kopplungsbedingungen definiert sind, müssen als Voraussetzung für Satz 2 die Index-1-Bedingungen (4.13) überprüft werden. Für das zweite Subsystem läßt sich dieses relativ einfach zeigen:

1. Die erste Bedingung ergibt sich aufgrund von

$$\frac{\partial h_2}{\partial z_2} = M_s,$$

da die Massenmatrix M_s positiv definit und damit auch regulär ist.

2. Für die zweite Bedingung müssen die folgenden Ableitungen bestimmt werden:

$$\frac{\partial h_2}{\partial u} = -D_s, \quad \frac{\partial g}{\partial z_2} = -T_s.$$

Damit erhält man insgesamt die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial z_2} & \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_s & -D_s \\ -T_s & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Durch Block-Gauß Elimination läßt sich die Matrix in

$$\begin{pmatrix} M_s & -D_s \\ 0 & -T_s M_s^{-1} D_s \end{pmatrix}$$

umformen. Diese Matrix ist ebenfalls regulär, da $D_s = T_s^t$ gilt und daher die Matrix $T_s M_s^{-1} D_s = T_s M_s^{-1} T_s^t$ positiv definit und damit nicht singulär ist.

Beim ersten Subsystem müssen mehrere Umformungen durchgeführt werden, um die Index-1-Bedingungen nachzuweisen:

1. Die Matrix $\frac{\partial h_1}{\partial z_1}$ hat die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial h_1}{\partial z_1} = \begin{pmatrix} M_f & B_f & -D_1 N_f (V - \Xi) V \\ 0 & -B_f^t M_f^{-1} B_f & B_f^t M_f^{-1} D_1 N_f (V - \Xi) V \\ 0 & 0 & \tilde{K} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Da die drei Matrizen auf der Hauptdiagonalen positiv bzw. negativ definit und damit auch regulär sind, ist auch die gesamte Matrix in (4.35) nicht singulär. Im folgenden wird kurz

$$E_f = D_1 N_f (V - \Xi) V$$

gesetzt.

2. Für die Matrizen $\frac{\partial h_1}{\partial u}$ und $\frac{\partial g}{\partial z_1}$ ergibt sich

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} = \begin{pmatrix} -D_f \\ B_f^t M_f^{-1} D_f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial z_1} = \begin{pmatrix} T_f & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Daraus folgt für die zusammengesetzte Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_f & B_f & -E_f & -D_f \\ 0 & -B_f^t M_f^{-1} B_f & B_f^t M_f^{-1} E_f & B_f^t M_f^{-1} D_f \\ 0 & 0 & \tilde{K} & 0 \\ T_f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Durch die Anwendung eines Block-Gauß Eliminationsschrittes erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} M_f & B_f & -E_f & -T_f^t \\ 0 & -B_f^t M_f^{-1} B_f & B_f^t M_f^{-1} E_f & B_f^t M_f^{-1} T_f^t \\ 0 & 0 & \tilde{K} & 0 \\ 0 & -T_f M_f^{-1} B_f & -T_f M_f^{-1} E_f & -T_f M_f^{-1} T_f^t \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

wobei der Zusammenhang $D_f = T_f^t$ berücksichtigt wurde. Der nächste Eliminationsschritt führt in dieser Matrix zu dem folgenden rechten unteren Diagonalelement:

$$-T_f M_f^{-1} T_f^t - (T_f M_f^{-1} B_f)(B_f^t M_f^{-1} B_f)^{-1}(B_f^t M_f^{-1} T_f^t). \quad (4.39)$$

Diese Matrix ist wieder negativ definit und daher auch regulär. Außerdem wird diese Matrix durch den letzten Eliminationsschritt nicht mehr geändert. Damit sind auch die Regularitätseigenschaften für das erste Subsystem nachgewiesen, da alle Matrizen auf der Hauptdiagonalen regulär sind.

Als letztes muß noch die Kopplungsmatrix für das gesamte System

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \frac{\partial h_1}{\partial z_2} & \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z_1} & \frac{\partial h_2}{\partial z_2} & \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z_1} & \frac{\partial g}{\partial z_2} & 0 \end{pmatrix}$$

auf ihre Regularität untersucht werden. Durch Zeilen- und Spaltenvertauschung erhält man für diese Kopplungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z_1} & 0 & \frac{\partial g}{\partial z_2} \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial z_2} \end{pmatrix}.$$

Es muß also untersucht werden, was mit dem mittleren Diagonalelement passiert, wenn diese Matrix auf obere Dreiecksform gebracht wird. Dazu können die beiden Submatrizen getrennt voneinander bearbeitet werden, wie es oben bereits durchgeführt wurde. Als Diagonalterm in der Mitte ergibt sich daher die Matrix

$$-T_s M_s^{-1} T_s^t - T_f M_f^{-1} T_f^t - (T_f M_f^{-1} B_f)(B_f^t M_f^{-1} B_f)^{-1}(B_f^t M_f^{-1} T_f^t). \quad (4.40)$$

Diese Matrix ist offensichtlich negativ definit, so daß auch die Kopplungsmatrix regulär ist und alle Index-1-Bedingungen erfüllt sind.

Damit sind die Voraussetzungen für eine Anwendung von Satz 2 nachgewiesen. Die Block-Gauß-Seidel Iteration ist also unter den Voraussetzungen

$$\alpha < 1, L\alpha^{k_n} < 1$$

und für einen hinreichend kleinen Makrozeitschritt $H := \Delta t$ konvergent und besitzt eine quadratische Fehlerordnung. Die Kontraktivitätskonstante α ist dabei durch (4.22) definiert. Die Erfüllung dieser Kontraktivitätsbedingung ist also notwendig für eine Konvergenz der Block-Gauß-Seidel Iteration. Allerdings muß diese Bedingung nicht immer erfüllt sein, so daß das Block-Gauß-Seidel Verfahren divergent sein kann [AG01]. Die Erfüllung der Kontraktivitätsbedingung hängt dabei insbesondere von der Reihenfolge der Iteration

und der Zuordnung der Kopplungsbedingungen zu den Teilproblemen ab. Dieses erklärt auch die unterschiedlichen Stabilitätsgebiete bei den verschiedenen Varianten der gestaffelten Verfahren. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, ein Verfahren zu konstruieren, das auch unter schwächeren Voraussetzungen als die dynamische Iteration konvergiert. Dieses Verfahren wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

4.3 Approximative Block-Newton Verfahren

In diesem Abschnitt wollen wir einen alternativen Lösungsansatz für eine starke Kopplung der Teillöser vorstellen. Bei dem gekoppelten Problem der Fluid-Struktur Interaktion muß in jedem Zeitschritt ein nichtlineares diskretes Problem gelöst werden, das im allgemeinen mit einem Newton-Verfahren oder einer entsprechenden Variante davon berechnet wird. Bei monolithischen bzw. simultanen Lösungsverfahren wird diese Vorgehensweise zum Beispiel auf das gesamte gekoppelte Problem [Blo98], [HWD01] angewendet. Wir verwenden in dieser Arbeit partitionierte Verfahren und wollen nur die vorhandenen Löser für die Teilprobleme einsetzen, so daß das Newton-Verfahren nicht direkt angewendet werden kann, da die partiellen Ableitungen der Kopplungsterme nicht zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund werden hier approximative Block-Newton Verfahren eingesetzt, die als Grundlage das Newton-Verfahren für das gesamte System besitzen, aber in denen die partiellen Ableitungen durch Finite Differenzen und mit Hilfe der (iterativen) Löser für die Teilprobleme approximiert werden. Die approximativen Block-Newton Verfahren wurden in erster Linie zur Berechnung von Problemen [Cha85], [Kel77] entwickelt, bei denen die Dimension eines Teilproblems im Verhältnis zur Dimension des gesamten Problems sehr klein war. Sie wurden in den letzten Jahren allerdings auch vermehrt zur Berechnung von gekoppelten Problemen eingesetzt, in denen die Dimension beider Teilprobleme ungefähr gleich groß ist. Dabei handelte es sich allerdings in fast allen Fällen um stationäre Probleme. So wurden in [Art96] und [Men99] chemische Probleme untersucht, und in [Fis97] stationäre Navier-Stokes Gleichungen mit einem approximativen Block-Newton Verfahren berechnet. In dieser Arbeit werden diese Block-Newton Verfahren zum ersten Mal auf instationäre gekoppelte Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung angewendet.

Um das Block-Newton Verfahren in unserer Situation einsetzen zu können, müssen als erstes die (iterativen) Löser für das Fluid- und Strukturproblem als Fixpunktiterationen formuliert werden, wie es im letzten Kapitel vorgestellt wurde. Der iterative Löser für das Fluid läßt sich durch

$$(V_{n+1}^{(k+1)}, P_{n+1}^{(k+1)}) = F(V_{n+1}^{(k)}, P_{n+1}^{(k)}, \tilde{U}_{n+1}, \tilde{W}_{n+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

und die Iteration des Strukturlösers durch

$$(U_{n+1}^{(k+1)}, W_{n+1}^{(k+1)}) = G(\tilde{V}_{n+1}, \tilde{P}_{n+1}, U_{n+1}^{(k)}, W_{n+1}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

als eine Fixpunktiteration darstellen, wobei $(n + 1)$ der Zeitschritt und k der Iterationsindex sind. Da wir im folgenden nur den Zeitschritt $(n + 1)$ betrachten, werden wir den Zeitindex $(n + 1)$ bei den Fluid- und Strukturvariablen weglassen. Außerdem bezeichnen wir die Fluidgrößen kurz als $X = (V, P)$ und die Strukturvariablen als $Y = (U, W)$. Damit können wir die Iterationen (4.41), (4.42) zum Zeitpunkt t_{n+1} in der folgenden Kurzform darstellen:

$$X^{(k+1)} = F(X^{(k)}, Y), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.43)$$

für das Fluid und

$$Y^{(k+1)} = G(X, Y^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

für die Struktur. Wir setzen für die Iterationsoperatoren in (4.43) und (4.44) keine speziellen Eigenschaften außer derjenigen voraus, daß jede einzelne Iteration konvergent ist. In unserem Fall handelt es sich bei den iterativen Verfahren (4.43) und (4.44) um Newton-Raphson Iterationen, die unter gewissen Voraussetzungen an die Teilprobleme quadratisch konvergent sind.

4.3.1 Umformulierung des gekoppelten Problems

Mit Hilfe der Fixpunktiterationen (4.43) und (4.44) kann das gekoppelte Problem so umformuliert werden, daß die approximativen Block-Newton Verfahren darauf angewendet werden können. Wir suchen im folgenden eine Lösung des gekoppelten Systems

$$f(X, Y) = X - F(X, Y) = 0, \quad (4.45)$$

$$g(X, Y) = Y - G(X, Y) = 0, \quad (4.46)$$

das aus den Fixpunktiterationen (4.43) und (4.44) entstanden ist. Es ist zu bemerken, daß diese Form nicht aus den ursprünglichen Gleichungen für das Fluid- und das Strukturproblem zum Zeitpunkt t_n hergeleitet wurde, sondern von den iterativen Lösern (4.41), (4.42) für jedes Teilproblem stammt.

Eine oft verwendete Methode, um das System (4.45), (4.46) zu lösen, ist das Block-Jakobi oder Block-Gauß-Seidel Verfahren [CC96], [MMV98b], das in Abbildung 4.15 dargestellt wird. Die iterativen Verfahren, die bisher vorgestellt wurden, sind alle von dieser Form, wobei in den beiden Teilschritten allerdings solange iteriert wird, bis in den Teilproblemen Konvergenz erreicht ist. Der Informationsaustausch zwischen dem Fluid- und Strukturlöser findet bei diesen Verfahren also erst nach einer zur Konvergenz benötigten Anzahl von Iterationen κ_1 bzw. κ_2 statt. Alternativ dazu werden in [CC96] und in [MMV98b] Iterationsverfahren eingesetzt, bei denen in jedem Teilproblem nur einige Iterationen durchgeführt werden und zwischendurch die Kopplungsgrößen ausgetauscht werden. Es ist jedoch sehr vom Problem abhängig, wann welche dieser Verfahren besser

Setze $k = 0$ und iteriere:

1. $X^{(k+1)} = F^{\kappa_1}(X^{(k)}, Y^{(k)})$, κ_1 Iterationen des Fluidlösers.
2. $Y^{(k+1)} = G^{\kappa_2}(X^{(k+1)}, Y^{(k)})$, κ_2 Iterationen des Strukturlösers.
3. Überprüfe die Konvergenzbedingungen; setze ggf. $k := k + 1$ und gehe zu 1.

Abbildung 4.15: *Block-Jakobi oder Block-Gauß-Seidel Verfahren*

bzw. überhaupt konvergieren. So wurde in [MMV99a] ein einfaches gekoppeltes Modellbeispiel mit verschiedenen Varianten der Block-Jakobi und Block-Gauß-Seidel Iterationen berechnet, und es wurde festgestellt, daß die Konvergenz der verschiedenen Varianten sehr stark von den Problemparametern abhängt.

Weiterhin ist bekannt, daß die Konvergenz dieser Verfahren oft sehr langsam ist oder diese überhaupt nicht konvergieren, obwohl die Iterationen für die Teilprobleme als konvergent vorausgesetzt werden [MMV99a]. Diese Problematik wurde bereits im letzten Abschnitt untersucht. Daher werden effizientere und robustere Verfahren – wie zum Beispiel Newton-Raphson Methoden oder Varianten davon – zur Lösung des gekoppelten Systems (4.45), (4.46) eingesetzt. Diese benötigen allerdings die Auswertung der partiellen Ableitungen bzw. die Berechnung der Jakobi-Matrizen, die bei einem partitionierten Lösungsansatz nicht zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund werden wir hier approximative Block-Newton Verfahren anwenden, bei denen die Ableitungen durch Finite Differenzen und unter Verwendung der iterativen Löser F und G approximiert werden. Wir orientieren uns hierbei im wesentlichen an der Arbeit von [AM95], da für die Darstellung der approximativen Block-Newton Verfahren auch verschiedene andere Möglichkeiten existieren [MMV99a], [MMV99b].

Ein Schritt des zugrundeliegenden Newton-Raphson Verfahrens für das gekoppelte System (4.45), (4.46) beinhaltet die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystem in jedem Iterationsschritt:

$$\begin{pmatrix} D_X f(X^{(k)}, Y^{(k)}) & D_Y f(X^{(k)}, Y^{(k)}) \\ D_X g(X^{(k)}, Y^{(k)}) & D_Y g(X^{(k)}, Y^{(k)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X^{(k)} \\ \Delta Y^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(X^{(k)}, Y^{(k)}) \\ g(X^{(k)}, Y^{(k)}) \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Hierbei bezeichnen $\Delta X^{(k)} := X^{(k+1)} - X^{(k)}$ und $\Delta Y^{(k)} := Y^{(k+1)} - Y^{(k)}$, $D_X f$ bzw. $D_Y f$ sind die partiellen Ableitungen von f nach X bzw. Y (analog für g). Wir wollen hier nur die existierenden Löser für die Teilprobleme verwenden, d.h. die Iterationen F und G . Dieses bedeutet, daß wir keinen direkten Zugriff auf die partiellen Ableitungen $D_X f$, $D_Y f$, etc. in (4.47) haben und diese daher geeignet approximieren müssen.

4.3.2 Iterative Lösung des gekoppelten Systems

Wir betrachten im folgenden nur einen einzelnen Schritt der Block-Newton Iteration, so daß wir den Iterationsindex k weglassen können. Wir wollen also den Vektor $(\Delta X, \Delta Y)^T$ mit der gegebenen rechten Seite $-(f, g)^T$ berechnen. Dazu führen wir (symbolisch) eine Block-Gauß Elimination des Systems (4.47) durch:

$$\begin{aligned} [D_X f] \Delta X &= -[D_Y f] \Delta Y - f \\ \implies \Delta X &= -[D_X f]^{-1} f - [D_X f]^{-1} [D_Y f] \Delta Y, \end{aligned} \quad (4.48)$$

und setzen diesen Wert in die zweite Gleichung ein:

$$([D_Y g] - [D_X g][D_X f]^{-1}[D_Y f]) \Delta Y = -g + [D_X g][D_X f]^{-1} f \quad (4.49)$$

$$\iff S \Delta Y = -r. \quad (4.50)$$

Diese Schurkomplementgleichung wird nach ΔY gelöst, so daß mit dem Ergebnis für ΔY die erste Gleichung nach ΔX gelöst werden kann. Wir schreiben die Schurkomplementgleichung in Kurzform als

$$S \Delta Y = ([D_Y g] - [D_X g]C) \Delta Y = -g - [D_X g]q = -r, \quad (4.51)$$

mit

$$q := -[D_X f]^{-1} f, \quad C := [D_X f]^{-1} [D_Y f]. \quad (4.52)$$

Daher kann ein Schritt der Block-Newton Iteration so formuliert werden, wie es in Abbildung 4.16 gezeigt wird. Im folgenden soll beschrieben werden, wie die Jakobi-Matrizen approximiert und wie lineare Systeme mit der Jakobi-Matrix $D_X f$ gelöst werden können. Für den ersten Schritt erinnern wir uns daran, daß wir einen iterativen Löser für die Gleichung mit f haben. Weiter kann dieser Schritt als eine Iteration eines Newton-Raphson Verfahrens für die Lösung q der Gleichung

$$f(X^{(k)} + q, Y^{(k)}) = 0$$

gesehen werden, wenn $X^{(k)}$ und $Y^{(k)}$ als fest angenommen werden. Dieses ist gerade die Lösung des Fluidproblems, falls die Strukturvariablen als bekannt vorausgesetzt werden.

1. Löse die Gleichung $[D_X f]q = -f$ nach q .

2. Berechne die modifizierte rechte Seite

$$r = g + [D_X g]q.$$

3. Löse die Gleichung $S\Delta Y = -r$ mit dem Schurkomplement

$$S = [D_Y g] - [D_X g]C$$

nach ΔY .

4. Berechne $\Delta X = q - C\Delta Y$.

Abbildung 4.16: *Ein Schritt der Block-Newton Iteration*

Daher können wir hier den iterativen Löser F einsetzen, um eine Approximation $q \approx Z_m - X^{(k)}$ zu erhalten, wobei

$$Z_{j+1} = F(Z_j, Y^{(k)}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad m \geq 1$$

mit $Z_0 = X^{(k)}$ gilt. Da der iterative Löser F aus einer Newton-Raphson Iteration für die Lösung des Fluidproblems besteht, wird nur ein Iterationsschritt von F benötigt.

Im zweiten Schritt verwenden wir zur Approximation des Vektors r eine Taylor-Entwicklung von g um q :

$$r = g + [D_X g]q \approx g(X^{(k)} + q, Y^{(k)}) = Y^{(k)} - G(X^{(k)} + q, Y^{(k)}).$$

Zur Berechnung der rechten Seite setzen wir definitionsgemäß den iterativen Löser G ein (d.h. ein Iterationsschritt mit G).

Für den dritten Schritt wenden wir ein iteratives Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Schurkomplementmatrix S an. Da S im allgemeinen eine unsymmetrische Matrix ist (aufgrund der nicht symmetrischen Matrizen, die bei der Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen auftreten), wählen wir die Bi-CGStab-Methode als iterativen Löser. Dazu benötigen wir das Produkt von S mit einem beliebig vorgegebenen Vektor w . Dieses Matrix-Vektor Produkt können wir durch Finite Differenzen

approximieren, wobei die Schrittweite h genügend klein gewählt werden muß:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}S(hw) &= \frac{1}{h}([D_Y g](hw) - [D_X g]C(hw)) \\ &\approx \frac{1}{h}(g(X^{(k)} - C(hw), Y^{(k)} + hw) - g(X^{(k)}, Y^{(k)})).\end{aligned}$$

In der Approximation $S(hw)$ wird außerdem das Matrix-Vektor Produkt $C(hw) =: v$ gebraucht, das wie im ersten Schritt als Lösung der Gleichung

$$[D_X f]v = [D_Y f](hw)$$

berechnet werden kann. Zusätzlich wird dazu noch der Ausdruck $[D_Y f](hw)$ durch Finite Differenzen approximiert:

$$[D_Y f](hw) \approx f(X_k, Y_k + hw) - f(X_k, Y_k).$$

Zur Berechnung von $C(hw)$ wird der iterative Löser F also zweimal verwendet. Dieses bedeutet, daß pro Iterationsschritt des Bi-CGStab-Verfahrens zwei Aufrufe von G und vier Aufrufe von F notwendig sind, da jeweils zwei Matrix-Vektor Produkte Sw_1 und Sw_2 berechnet werden müssen. Insgesamt werden also pro Bi-CGStab-Iteration sechs Iterationen der Löser für die Teilprobleme verwendet. Wir führen in jedem Iterationsschritt des approximativen Block-Newton Verfahrens jeweils nur ein bis zwei Iterationen der Bi-CGStab-Methode durch, da wir zum einen nach einigen Zeitschritten einen sehr guten Startvektor aus dem vorhergehenden Zeit- bzw. Iterationsschritt haben und zum anderen eine relativ gute Approximationslösung der Schurkomplement-Gleichung für die Block-Newton Iteration ausreichend ist [MMV98a].

Im vierten Schritt ist q bekannt und wir benötigen wieder das Produkt von der Matrix C mit einem Vektor, in diesem Fall ΔY , der im dritten Schritt berechnet wurde. Dieses Matrix-Vektor Produkt kann in der gleichen Art und Weise bestimmt werden wie im dritten Schritt für $C(hw)$. Dazu werden wieder zwei Iterationen des Fluidlösers F eingesetzt. Damit läßt sich jetzt der gesamte Aufwand für einen Iterationsschritt des approximativen Block-Newton Verfahrens bestimmen: In jedem Iterationsschritt werden $4 + 6 \cdot it(Bi - CGStab)$ Aufrufe der iterativen Löser F und G benötigt. Daran kann man erkennen, daß der Aufwand des approximativen Block-Newton Verfahrens von der Anzahl der Bi-CGStab-Iterationen entscheidend abhängt.

Für die approximativen Block-Newton Verfahren ist in [Cha85] und [MMV98a] gezeigt worden, daß sie die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens erhalten, wenn die iterativen Löser für die Teilprobleme quadratisch konvergent sind oder die Approximationsfehler, die durch die Verwendung der Fixpunktiterationen entstehen, von zweiter Ordnung sind. Dazu wird das approximative Block-Newton Verfahren als eine Störung

des (gewöhnlichen) Newton-Verfahrens betrachtet [MMV98a], so daß sich die Konvergenzeigenschaften des Newton-Verfahrens übertragen lassen. In [Men99] werden die Konvergenzeigenschaften des approximativen Block-Newton Verfahrens untersucht, wenn für die iterativen Löser F und G nur lineare Konvergenz vorausgesetzt wird. In diesem Fall läßt sich durch eine detaillierte mathematische Analyse zeigen, daß das approximative Block-Newton Verfahren mindestens linear konvergent ist [Men99]. In unserem Fall handelt es sich bei den Fixpunktiterationen (4.41) und (4.42) um Newton-Raphson Verfahren, die unter bestimmten Voraussetzungen an die Teilprobleme (lokal) quadratisch konvergent sind. Daher behält das approximative Block-Newton Verfahren hier seine quadratischen Konvergenzeigenschaften [MMV98a].

Außerdem kann mit Hilfe des Newton-Kantorovich Theorems (vgl. z.B. [OR00]) gezeigt werden, daß die Newton-Verfahren und damit auch die approximativen Block-Newton Verfahren (als eine Störung des Newton Verfahrens) unter schwächeren Bedingungen als die Block-Gauß-Seidel Iteration konvergieren. Eine hierbei (noch) offene Frage ist, ob die numerische Analyse (Satz von Arnold) der Block-Gauß-Seidel Iteration auch für Block-Newton Verfahren durchgeführt werden kann. Dazu müsste untersucht werden, wie die Kontraktivitätskonstante α bei einem Newton- bzw. Block-Newton Verfahren aussieht.

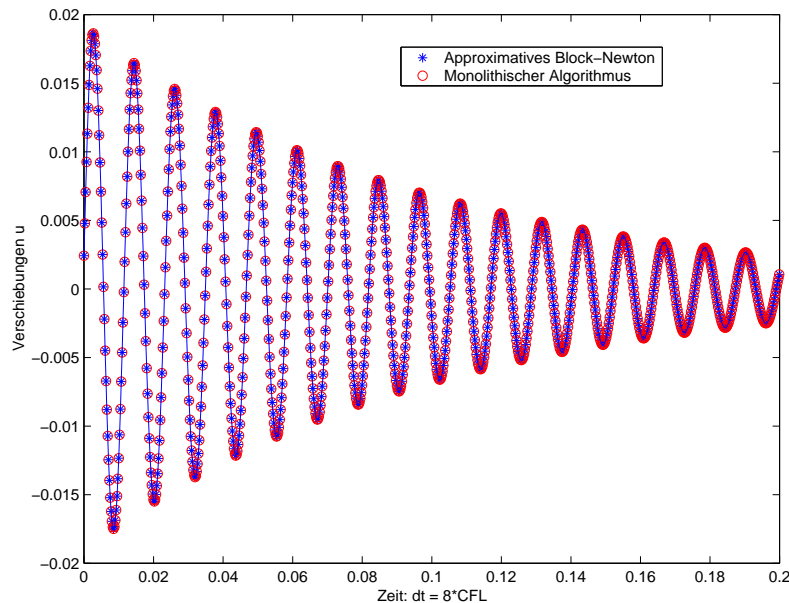


Abbildung 4.17: Vergleich mit monolithischem Lösungsverfahren

Eine Alternative zu den approximativen Block-Newton Verfahren, die als eine natürliche Erweiterung der Block-Gauß-Seidel und Block-Jakobi Iterationen angesehen werden können, sind weitere nichtlineare Iterationsverfahren wie zum Beispiel das nichtlineare

GMRES-Verfahren, das auch nur die Wirkung der Iterationsoperatoren F und G auf einen Vektor benötigt. Dieser Ansatz wurde zum Beispiel in [KS92] auf nichtlineare gekoppelte elliptische Probleme angewendet und könnte eine Alternative zu den approximativen Block-Newton-Verfahren darstellen.

Abschließend sollen die approximativen Block-Newton Verfahren zur Lösung des eindimensionalen Modellbeispiels eingesetzt werden und sowohl mit der Block-Gauß-Seidel Iteration als auch mit einem monolithischen Verfahren [Blo98], das das Modellbeispiel als ein Gesamtsystem betrachtet, verglichen werden. Das approximative Block-Newton Verfahren berechnet die gleiche Lösung wie die Block-Gauß-Seidel Iteration, benötigt aber eine kleinere Zahl an Iterationen (vgl. Abbildung 4.18) und auch eine geringere Anzahl an Löseraufrufen (s. Abbildung 4.19). In diesem Fall wurde nur eine Iteration der Bi-CGStab Methode benötigt, da das Strukturproblem (zwei Freiheitsgrade) eine kleine Dimension hat. Die stark gekoppelten, partitionierten Lösungsverfahren können mit einem voll gekoppelten, simultanen Lösungsansatz [Blo98] validiert werden, wie in Abbildung 4.17 dargestellt wird. Als Fazit ist festzustellen, daß bei einer Verwendung von großen Zeitschritten stark gekoppelte Lösungsverfahren notwendig sind und die approximativen Block-Newton Verfahren eine effiziente Alternative zu den „klassischen“ Block-iterativen Verfahren darstellen.

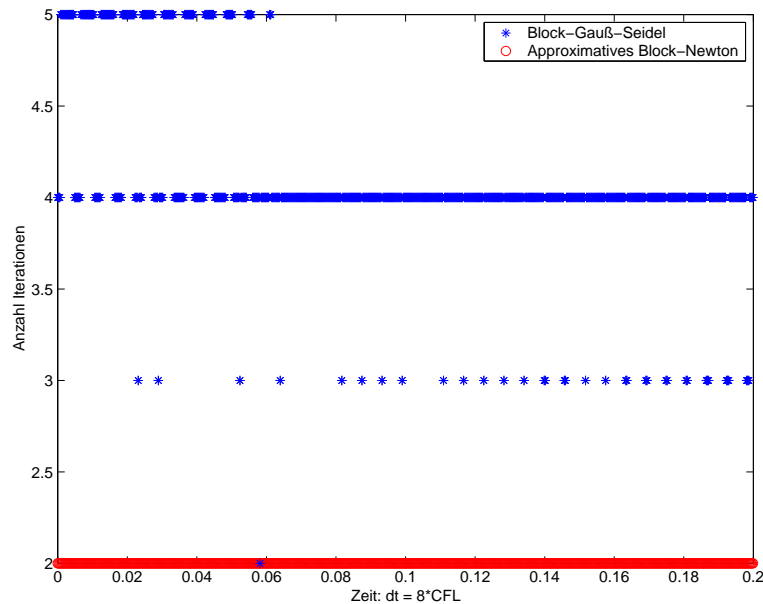


Abbildung 4.18: *Iterationsanzahl für die Block-iterativen Verfahren*

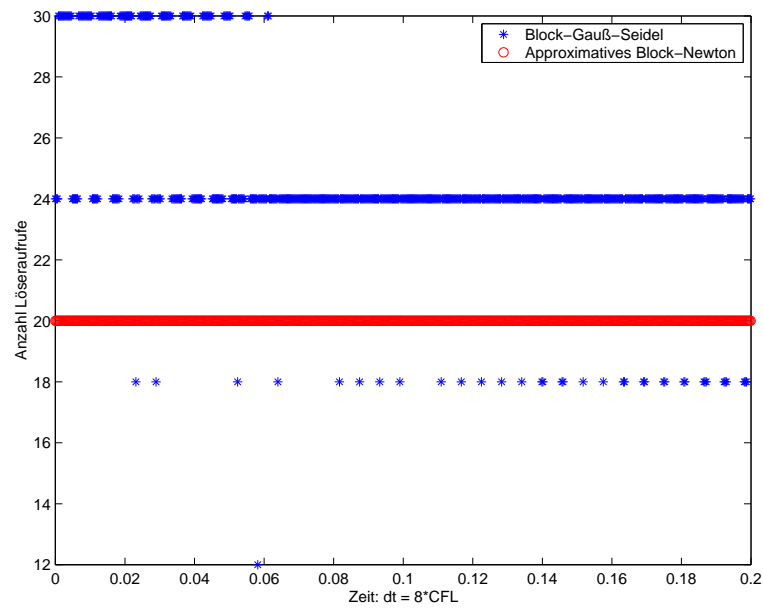


Abbildung 4.19: Löseraufrufe für die Block-iterativen Verfahren

Kapitel 5

Software-Aspekte des Kopplungsinterfaces

In dieser Arbeit wird ein modularer Lösungsansatz zur Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur gewählt. Es werden dabei partitionierte Verfahren eingesetzt, um existierende Löser und Software für die Teilprobleme miteinander zu koppeln. Zur Kopplung der verschiedenen Programme soll ein Software-Werkzeug zur Verfügung gestellt werden, das in diesem Kapitel beschrieben wird. Dazu werden im ersten Abschnitt die allgemeinen Anforderungen an ein Kopplungsinterface erläutert, im zweiten Abschnitt wird detailliert auf eine Realisierung, die Kopplungsbibliothek GRISSLi [Mün98b], eingegangen, und im dritten Abschnitt wird vorgestellt, wie die in dieser Arbeit entwickelten Kopplungsalgorithmen mit GRISSLi implementiert werden können.

5.1 Anforderungen an ein Kopplungsinterface

Wir untersuchen die Anforderungen an ein Interface hier speziell für Probleme der Fluid-Struktur Interaktion und nicht allgemein für gekoppelte Probleme, obwohl viele Forderungen einfach zu übertragen sind. Ein Kopplungsinterface hat im wesentlichen zwei Kernaufgaben zu erfüllen:

- die Kommunikation von Daten zwischen den verschiedenen Programmen, damit ein Austausch der Kopplungsgrößen ermöglicht wird, und
- die Synchronisation der beteiligten Programme, so daß ein konsistenter zeitlicher Ablauf stattfindet.

Bei partitionierten Verfahren wird für die einzelnen Teilprobleme des gekoppelten Problems separate Software eingesetzt. Bei der Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur werden daher verschiedene Programme für die Strömung und die Struktur

verwendet. Im allgemeinen verwenden diese Programme unterschiedliche Finite Elemente oder Finite Volumen Typen und erzeugen unabhängig von dem anderen Programm Gitter, die auf die Teilprobleme optimal angepasst sind. So kann zum Beispiel ein Fluid-Löser strukturierte Netze aus Rechteckelementen (vgl. Abbildung 5.1) und ein Struktur-Löser strukturierte oder unstrukturierte Dreieckgitter benutzen, wie in Abbildung 5.2 dargestellt wird.

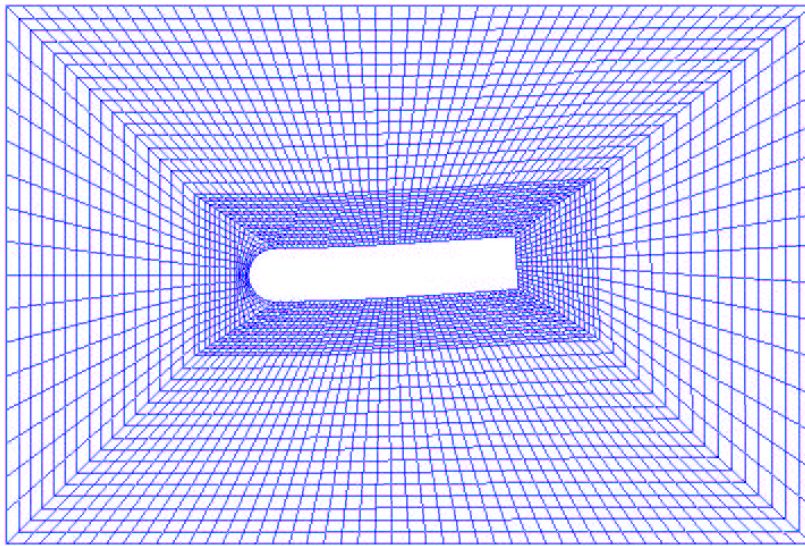


Abbildung 5.1: *Strukturiertes Rechteckgitter im Fluid*

Damit ergibt sich das Problem, das am Rand zwei nicht zueinander passende Gitter aufeinandertreffen [MF95]. Dieses führt zu den folgenden elementaren Aufgaben, die ein Kopplungsinterface erfüllen muß:

- Das Interface muß die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den verschiedenen Gittern bestimmen können. Hierbei handelt es sich um ein geometrisches Problem, was durch effiziente Such- und Zuordnungsalgorithmen gelöst werden kann.
- Die Kopplungsgrößen müssen bei dem Datenaustausch auf die unterschiedlichen Gitter interpoliert werden. Dazu sind verschiedene ein-, zwei- und auch dreidimensionale Interpolationstechniken notwendig, die auch die unterschiedlich feine Diskretisierung in den Teilgebieten berücksichtigen. Außerdem sollte es möglich sein, die in den Teillösern vorhandenen Interpolationsroutinen zu verwenden, da diese für das Teilproblem meistens optimal angepasst sind.

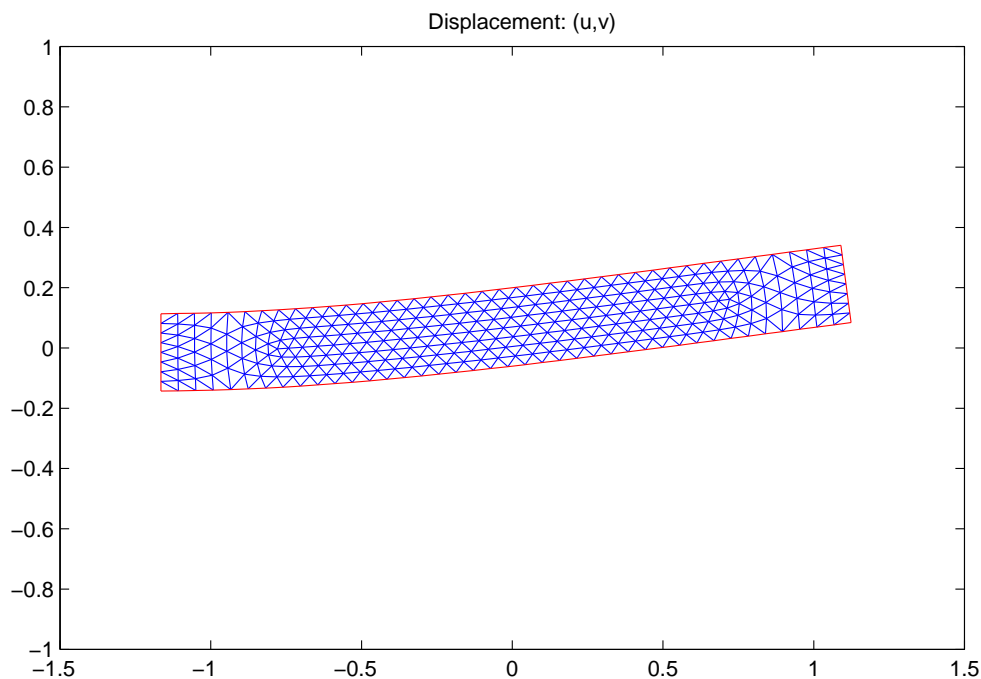


Abbildung 5.2: *Strukturiertes Dreieckgitter in der Struktur*

- Das Interface muß geometrische Änderungen des Randes durchführen können, um die Zustandgrößen des einen Gitters auf das andere korrekt zu übertragen.

Ein zusätzliches Problem tritt auf, wenn eines oder mehrere der zu koppelnden Programme parallel abläuft. Bei parallelen Programmen wird das Berechnungsgebiet im allgemeinen in disjunkte Teilgebiete zerlegt und diese auf mehrere Prozessoren verteilt. Dieses führt zu einem erhöhten Aufwand bei der Bestimmung der Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den verschiedenen Netzen, da diese über die einzelnen Prozessoren des parallelen Programms verteilt sein können.

Bei partitionierten oder gestaffelten Verfahren muß zu bestimmten Zeitpunkten ein Datenaustausch zwischen den verwendeten Programmen für die Teilprobleme durchgeführt werden. Das Kopplungsinterface hat die Aufgabe, diesen Ablauf zu synchronisieren und damit für einen konsistenten zeitlichen Ablauf zu sorgen. Dabei kann dieser Ablauf zum einen global gesteuert werden, zum anderen können die beteiligten Programme selbst – durch Kommunikation über das Kopplungsinterface – diese Funktion übernehmen. Außerdem müssen vom Interface Methoden zur Verfügung gestellt werden, mit denen eine äußere Iteration, wie sie bei den vorgestellten Kopplungsalgorithmen zur Erfüllung der Kopplungsbedingungen notwendig ist, ermöglicht wird. So müssen die Teillöser Informationen über Konvergenz oder Iterationsanzahl der Kopplungsalgorithmen austauschen

können.

In den letzten Jahren sind in mehreren Projekten Kopplungsinterfaces für unterschiedliche Anwendungsfälle entwickelt worden. In den meisten Fällen war eine Grundvoraussetzung, daß mehrere parallele Anwendungsprogramme auf einem Parallelrechner miteinander gekoppelt werden sollen.

Von der GMD (Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, St. Augustin, Bonn) wurden die Kopplungsbibliotheken COCOLIB [BWHS97] und GRISSLi [Mün98b], [Mün98a] entwickelt, die jetzt in dem Projekt MpCCI zusammengefasst worden sind. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Kopplungsbibliotheken COCOLIB und GRISSLi besteht darin, daß bei COCOLIB ein zentraler Kontrollprozeß vorhanden ist, wohingegen bei GRISSLi alle Prozesse gleichwertig sind und eine Steuerung dezentral vorgenommen wird. Ein weiterer Unterschied ergibt sich dadurch, daß bei GRISSLi in der Initialisierungsphase ein festgelegter Kopplungsalgorithmus definiert wird. Dadurch können im voraus optimierte Kommunikationspläne generiert werden. In der COCOLIB werden die Zeitpunkte des Datenaustausches durch den Kontrollprozeß bestimmt.

Die Kopplungsbibliothek MCL („Model Coupling Library“) von NCAR [DL96] ermöglicht eine Kopplung von verschiedenen Modellen im NCAR Klima-Modell (wie zum Beispiel ein Modell für die Atmosphäre und ein Modell für den Ozean). Dieses Interface ist im engeren Sinne keine Bibliothek, sondern ein unabhängiges Programm, über das die Modelle kommunizieren. Ein weiteres Kopplungsinterface, das im Bereich der meteorologischen Anwendungen entstanden ist, ist OASIS (Meteo France und CERFACS). Bei beiden Projekten arbeitet das Kopplungsinterface jedoch nur seriell, so daß die parallelen Anwendungsprogramme die Verteilung der ausgetauschten Kopplungsgrößen selbst übernehmen müssen.

5.2 Die Kopplungsbibliothek GRISSLi

Die Kopplungsbibliothek GRISSLi wurde im Rahmen eines vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Projektes von 1996 bis 1998 vom IBM High Performance Support Center in Heidelberg, dem Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen der GMD in St. Augustin und dem Institut für Parallele und Verteilte Höchstleistungsrechner an der Universität Stuttgart entwickelt. Wir haben in der Entwicklungsphase von GRISSLi einen Prototypen des Kopplungsinterfaces getestet und validiert [Mün98a], [SM99] und setzen GRISSLi seitdem zur Kopplung von Strömungs- und Strukturprogrammen ein.

Das Ziel von GRISSLi war die Kopplung von parallelen gitterbasierten Anwendungsprogrammen auf einem Parallelrechner mit verteiltem Speicher („Distributed Memory Parallel Computer“). Jedes Anwendungsprogramm bzw. jeder Anwendungsprozeß erhält eine

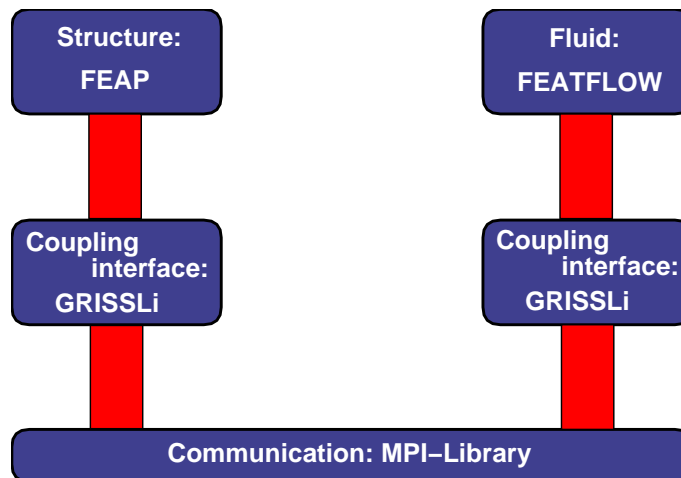


Abbildung 5.3: *Kopplung von Anwendungsprogrammen mit GRISSLi*

Instanz von GRISSLi zugewiesen, die für die Kommunikation und die Synchronisation zuständig ist (s. Abbildung 5.3). Dazu werden die für die Kopplung wichtigen Zustandsgrößen aus den Datenstrukturen der Anwendungsprogramme an das Kopplungsinterface übergeben. Umgekehrt müssen die vom Interface übertragenen Daten in die Datenstrukturen des Anwendungsprozesses geschrieben werden. Die eigentliche Kommunikation im Netzwerk wird dabei von MPI („Message Passing Interface“) [GLS94] übernommen, wie in Abbildung 5.3 dargestellt wird. Um einen Kopplungsalgorithmus in ein Anwendungsprogramm zu integrieren, werden in diesem Datenaustauschoperationen über das Kopplungsinterface eingefügt.

Die wesentlichen Grundkonzepte von GRISSLi werden durch die Begriffe Gittervariable und Synchronisations- bzw. Sprungpunkte geprägt. Wir werden diese Grundkonzepte hier kurz vorstellen und erläutern, wie sie bei der Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur eingesetzt werden können. Für eine detaillierte Beschreibung verweisen wir auf [Mün98b].

Eine Gittervariable ist eine an der Kopplung teilnehmende Zustandsgröße. Bei Problemen der Fluid-Struktur Interaktion handelt es sich zum Beispiel um den Druck bzw. die Spannungen des Fluides und die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten der Struktur am Rand. Jedes Anwendungsprogramm hat eine eigene Sicht auf die Gittervariablen. Jede Sicht referenziert ein Gitter, das strukturiert oder unstrukturiert sein kann, und umfaßt den programmspezifischen Anwendungsdatensatz. Die Anwendungsdaten stehen dabei im direkten Zusammenhang mit den definierten Gittern. Die Eigenschaften einer Gittervariablen sind in Abbildung 5.4 zu sehen. Weitere Charakteristiken einer Sicht sind der Gittertyp (Dreiecke, Rechtecke, Tetraeder, Quader, Anzahl der Knoten, etc.), der Datentyp

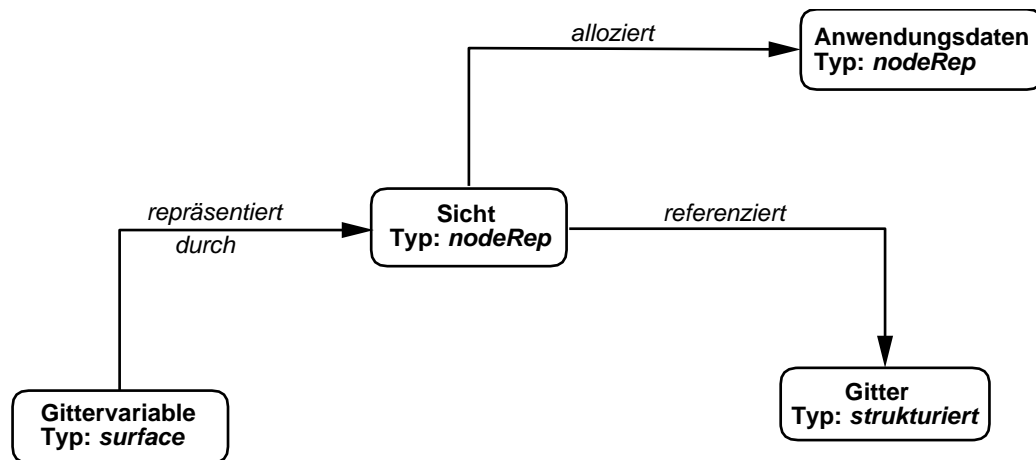


Abbildung 5.4: Das Konzept der Gittervariablen in GRISSLi

(Ordnung der Tensoren) und der Datentransfertype (Richtung der Kommunikation). Außerdem wird festgelegt, welcher Interpolationstyp beim Datenaustausch verwendet wird. Das GRISSLi-Kopplungsinterface bietet eine Reihe von vordefinierten Interpolationsalgorithmen an. Weiterhin besteht die Möglichkeit, über eine Programmschnittstelle die Interpolationsroutinen eines Anwendungsprogrammes einzubinden.

Die gekoppelten Anwendungsprogramme laufen prinzipiell asynchron zueinander. Ein Datenaustausch (d.h. Schreiben und Lesen auf eine Sicht) ist bei Synchronisationspunkten möglich. Dabei legen die Anwendungsprogramme die Reihenfolge der Synchronisationspunkte und die daran beteiligten Gittervariablen im voraus fest. Zusätzlich können Sprungpunkte („Branch points“) definiert werden, die einige Synchronisationspunkte überspringen oder auch zurückspringen können. Damit lassen sich zum Beispiel Konvergenzabfragen für die Zeitintegration oder für eine äußere Iteration realisieren. Ein einfaches Kommunikationsdiagramm für einen Kopplungsalgorithmus ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Aufgrund der Synchronisations- und Sprungpunkte ist eine globale Steuerung durch eine vorgegebene Ablauffolge und eine flexible Gestaltung der Kopplungsalgorithmen möglich. Insbesondere werden keine globalen Steuerungsprogramme benötigt, die die Anwendungen kontrollieren.

In GRISSLi existieren verschiedene Phasen der gekoppelten Berechnung: die Initialisierungs- und die Berechnungsphase. In der Initialisierungsphase werden in jedem Anwendungsprogramm die Gittervariablen, die jeweiligen Sichten auf die Gittervariablen und ihre Charakteristiken, die entsprechenden Gitter und die Datentypen der Anwendungsdaten definiert. Außerdem wird ein Kopplungsalgorithmus durch eine Reihenfolge der Synchronisationspunkte und eventuelle Sprungpunkte vorgegeben. In der Berechnungsphase werden

die Daten auf die verschiedenen Sichten der Gittervariablen von den Anwendungsprogrammen geschrieben oder von diesen gelesen. Wenn ein Synchronisations- oder Sprungpunkt erreicht wird, so wird die Kontrolle an das Kopplungsinterface übergeben, welches dann die Aufgabe des Datenaustausches übernimmt. Während der Berechnungsphase können keine Änderungen an dem Kopplungsalgorithmus oder an den Sichten der Anwendungsprogramme vorgenommen werden. Eine Ausnahme bildet hier nur das Ändern von Gittern, das unter anderem bei Problemen der Fluid-Struktur Wechselwirkung notwendig ist.

Insgesamt gesehen bietet GRISSLi dem Benutzer eine flexible Umgebung zur Kopplung von Anwendungsprogrammen an, in der insbesondere die Definition von neuen Kopplungsalgorithmen schnell durchgeführt werden kann.

5.3 Realisierung der Kopplungsalgorithmen

Im folgenden soll erläutert werden, wie die im fünften Kapitel vorgestellten Kopplungsalgorithmen mit Hilfe des Interfaces GRISSLi realisiert werden können. Dazu werden wir als erstes die gestaffelten Verfahren betrachten, bei denen im Gegensatz zu den stark gekoppelten Lösungsverfahren keine äußere Iteration eingesetzt wird.

Die Implementierung eines gestaffelten Verfahrens in GRISSLi wird für den $(n + 1)$ -ten Zeitschritt in der Abbildung 5.5 dargestellt. Bei dem ersten Synchronisationspunkt werden die Strukturverschiebungen in den Randknoten von dem Strukturlöser an das Fluidprogramm geschickt. In diesem wird zum einen eine Extrapolation der Verschiebungen und daraus eine Extrapolation der Randgeschwindigkeiten für den nächsten Zeitschritt berechnet und zum anderen das Fluidgitter aktualisiert. Anschließend wird das Fluidproblem im Zeitschritt $n + 1$ gelöst. An dem zweiten Synchronisationspunkt werden dann die berechneten Fluidspannungen zu dem Strukturlöser transferiert. Dort werden die Fluidspannungen am Interface in entsprechende Strukturlasten in den Randknoten der Struktur umgeformt. Danach wird mit diesen Strukturlasten das Strukturproblem gelöst. Der abschließende Branch- oder Sprungpunkt wird für eine Zeitabfrage benötigt. So wird mit diesem Branchpunkt ermittelt, ob das Ende der Simulation bereits erreicht wurde oder ob weitere Zeitschritte berechnet werden müssen. Das Kopplungsinterface übernimmt bei beiden Synchronisationspunkten nur die Aufgabe der Interpolation der Kopplungsgrößen auf die entsprechenden Gitterpunkte. Dazu werden die in GRISSLi vorhandenen Interpolationsroutinen verwendet.

Die parallelen Kopplungsalgorithmen lassen sich auf analoge Weise in GRISSLi implementieren. Dazu müssen nur die beiden Synchronisationspunkte direkt hintereinander an den Anfang eines Zeitschrittes gesetzt werden, so daß nach dem Austausch der Kopplungsgrößen das Fluid- und das Strukturproblem parallel berechnet werden können. Auch

die iterativen Verfahren, die auf einer Block-Gauß-Seidel Iteration beruhen, lassen sich in GRISSLi durch eine einfache Erweiterung des Algorithmus für das gestaffelte Verfahren realisieren. So muß hierzu lediglich ein weiterer Sprungpunkt eingefügt werden, der die Kopplungsbedingungen überprüft. Dieses geschieht bei unserer Implementierung der Block-Gauß-Seidel Iteration im Fluidlöser, der eine Überprüfung der kinematischen Kopplungsbedingungen jeweils am Ende eines Iterationsschrittes vornimmt.

Die Realisierung des approximativen Block-Newton Verfahrens in GRISSLi stellt sich dagegen als eine komplexere Aufgabe dar. Wir werden diese Realisierung hier nur in einer abstrakten Version vorstellen, um uns auf die wesentlichen algorithmischen Aspekte zu beschränken. So wird zum Beispiel beim ersten Synchronisationspunkt in Abbildung 5.6 der komplette Vektor $Y^{(k)}$ an das Fluidprogramm geschickt, obwohl in Wirklichkeit nur die Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten in den Randknoten der Struktur an das Fluid übertragen werden. Die Implementierung des approximativen Block-Newton Verfahrens in GRISSLi läßt sich in zwei Komponenten aufteilen. Der erste Teil enthält die ersten beiden und den letzten Schritt der Block-Newton Iteration und wird in Abbildung 5.6 gezeigt. In dem zweiten Teil (vgl. Abbildung 5.7) wird der Algorithmus für die Bi-CGSTAB Iteration realisiert, die wir in dieser Arbeit zur Lösung der Schur-Komplement Gleichung eingesetzt haben.

Die Kommunikationsschritte, die für das approximative Block-Newton Verfahren in jedem Iterationsschritt (hier von k zu $k+1$) notwendig sind, werden in der Abbildung 5.6 genauer erläutert. Als erstes benötigt der Fluidlöser den Vektor $Y^{(k)}$ von der Struktur, um damit die Lösung des linearen Gleichungssystems $[D_X f]q = -f$ mit Hilfe des iterativen Löser F zu bestimmen. Der Strukturlöser erhält daraufhin diesen Vektor q und den aktuellen Vektor $X^{(k)}$. Damit kann in der Struktur die modifizierte rechte Seite r berechnet werden. Die iterative Lösung der Schur-Komplement Gleichung $S\Delta Y = -r$ wird im nächsten Absatz genauer beschrieben. Der Lösungsvektor ΔY wird beim folgenden Synchronisationspunkt an das Fluidprogramm übergeben, so daß dieses damit die Korrektur ΔX bestimmen kann. Abschließend erfolgt eine Konvergenzabfrage für die Block-Newton Iteration, die einen zweiten Branchpunkt erfordert (der erste befindet sich in der Bi-CGSTAB Iteration). Am Ende der Block-Newton Iteration ist – analog zu den gestaffelten Verfahren oder der Block-Gauß-Seidel Iteration – ein weiterer Sprungpunkt vorhanden, an dem das Ende der Simulation abgefragt wird. Dieser Sprungpunkt ist in der Abbildung 5.6 nicht explizit aufgeführt.

Bei der iterativen Lösung der Schur-Komplement Gleichung werden Matrix-Vektor Produkte mit der Matrix S benötigt. Dabei muß für jedes Matrix-Vektor Produkt Sw der Ausdruck Cw bestimmt werden, der im Fluidlösers berechnet wird. Also müssen für jedes Matrix-Vektor Produkt Sw zwei Synchronisationspunkte eingefügt werden, bei denen zum einen der Vektor w an den Fluidlöser geschickt wird und zum anderen das Strukturpro-

gramm das Ergebnis $v = Cw$ empfängt. Da beim Bi-CGSTAB Algorithmus pro Iteration zwei Matrix-Vektor Produkte mit der Matrix S benötigt werden, sind also insgesamt vier Synchronisationspunkte einzufügen. Außerdem wird am Branchpunkt nach jedem Iterationsschritt überprüft, ob die Bi-CGSTAB Iteration konvergiert ist oder ob weitere Iterationen erforderlich sind. Die Realisierung dieser Iteration wird in der Abbildung 5.7 dargestellt.

Das approximative Block-Newton Verfahren läßt sich also in GRISLi umsetzen, auch wenn der Aufwand wesentlich höher ist und mehr Kommunikationsschritte pro Iteration notwendig sind. Außerdem ist festzustellen, daß für diesen Kopplungsalgorithmus mehr Änderungen in dem Ablauf des Fluid- bzw. Strukturlösers vorzunehmen sind als zum Beispiel bei einer Block-Gauß-Seidel Iteration. Wir werden im nächsten Kapitel die Effizienz der einzelnen Kopplungsalgorithmen miteinander vergleichen, indem wir sie auf zweidimensionale Beispiele anwenden.

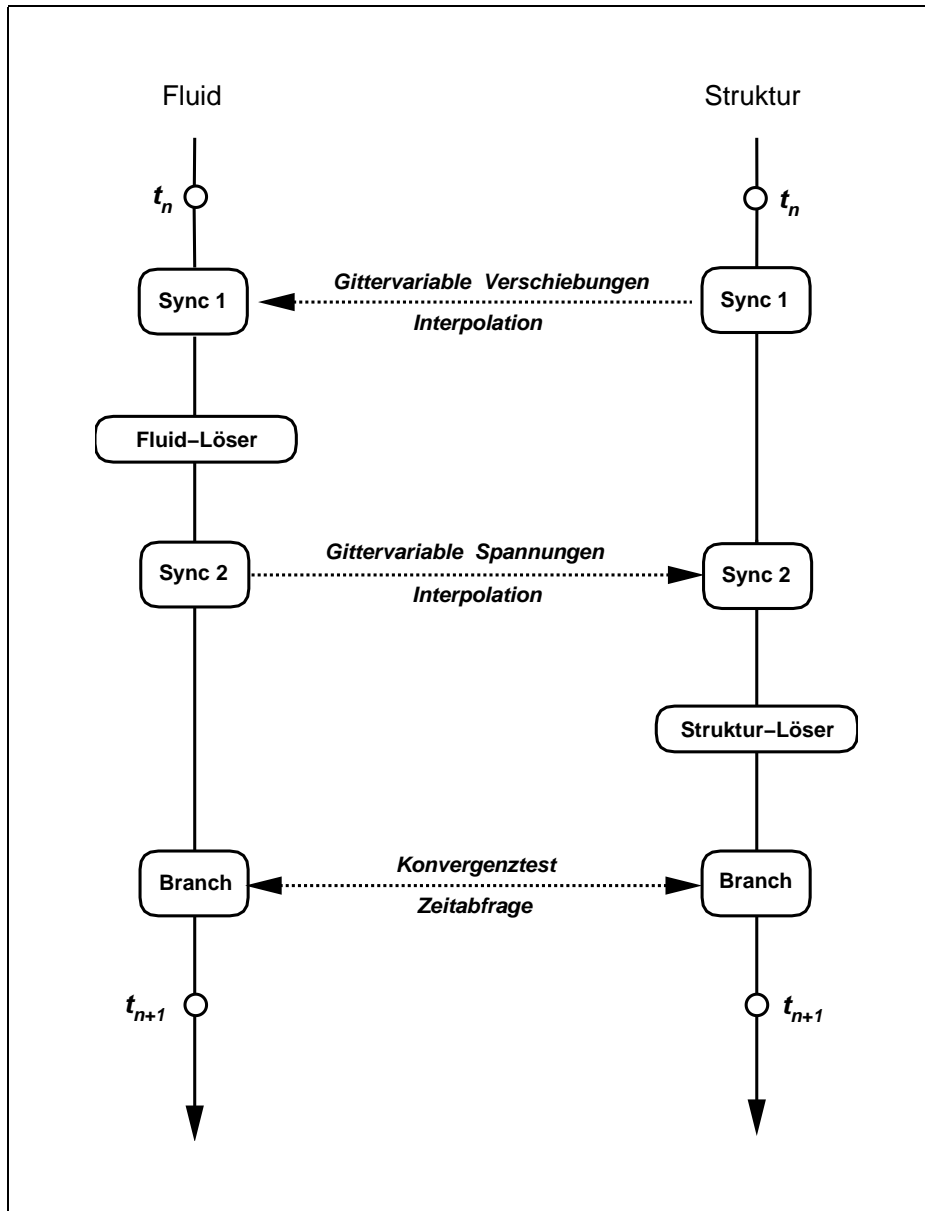


Abbildung 5.5: Das Konzept der Synchronisationspunkte in GRISLi

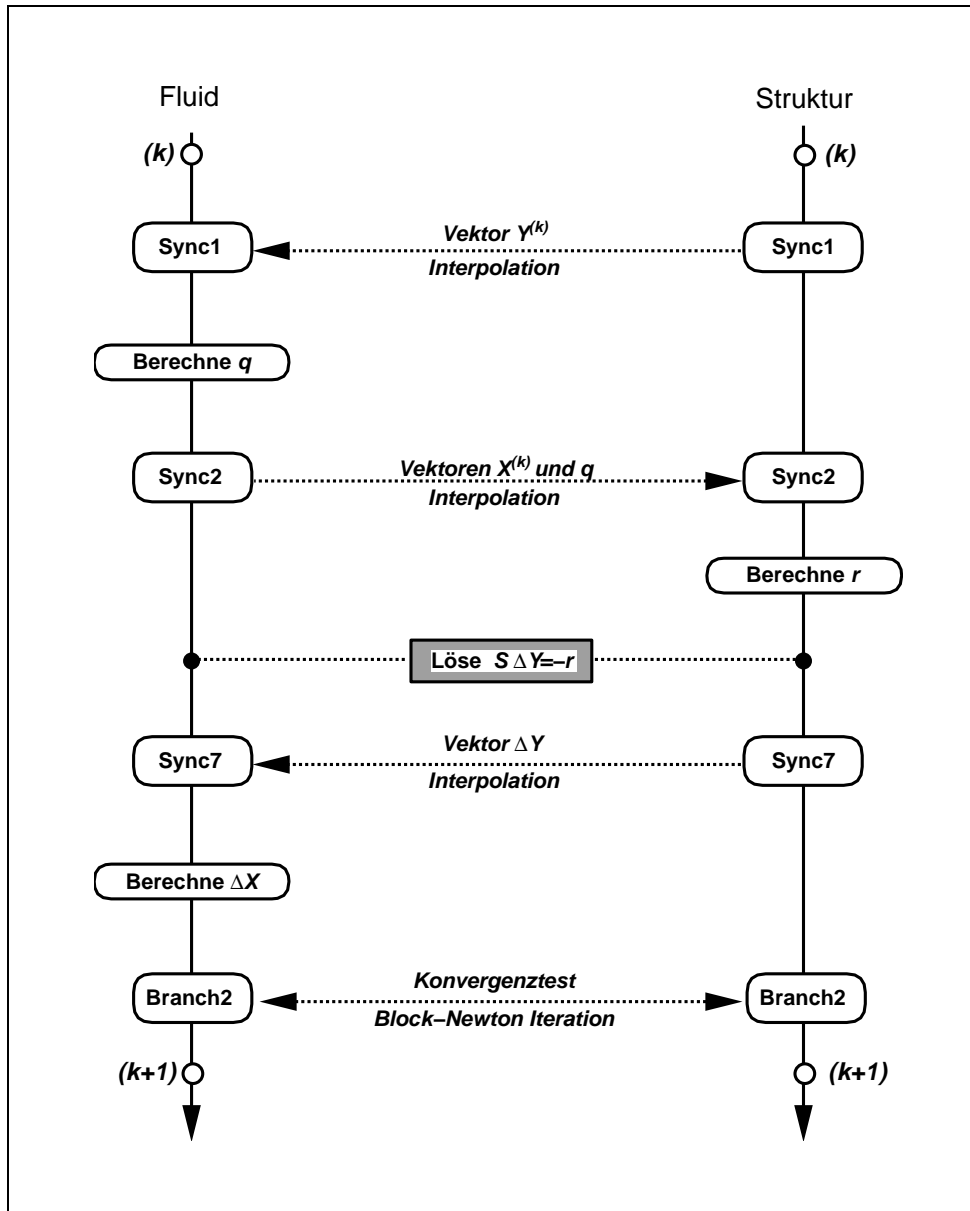


Abbildung 5.6: Realisierung der Block-Newton Iteration in GRISLi

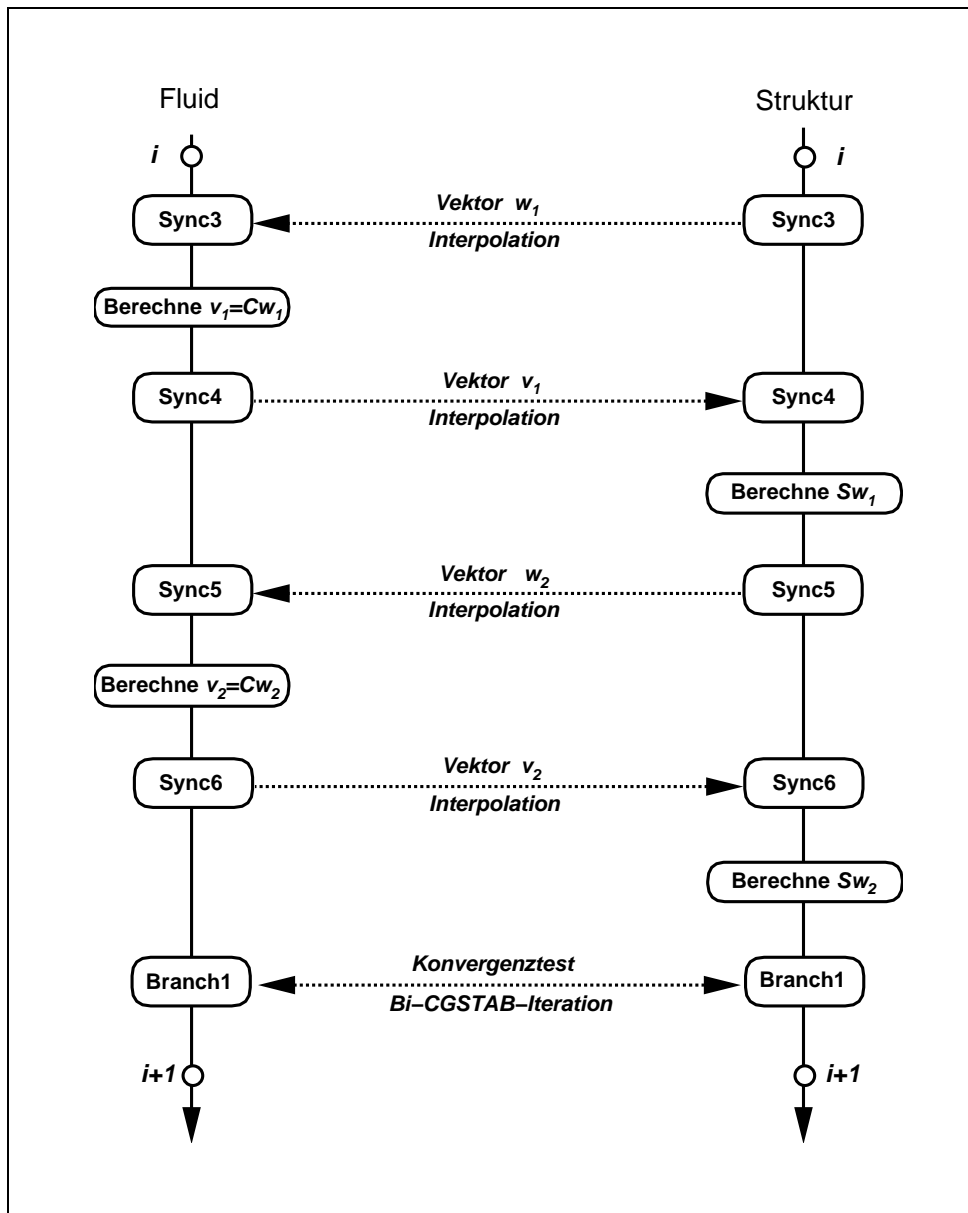


Abbildung 5.7: Realisierung der Bi-CGSTAB Iteration in GRISLi

Kapitel 6

Anwendungen und Beispiele

Wir wollen in diesem Kapitel die entwickelten Kopplungsalgorithmen auf mehrere Beispiele der Fluid-Struktur Interaktion anwenden. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene zweidimensionale Probleme berechnet und die Effizienz der vorgestellten Lösungsverfahren untersucht. Die dabei verwendeten Programme für die Strömungs- und Strukturmechanik werden zusammen mit den notwendigen Erweiterungen dieser Programme im Anhang vorgestellt.

Das erste Beispiel behandelt die Bewegung eines Partikels in einem Strömungskanal, wobei die Bewegung des Teilchens durch ein schräges Einströmprofil beeinflusst wird. Dieses Beispiel dient in erster Linie dazu, die verschiedenen Techniken zur Berechnung von Strömungen mit beweglichen Rändern miteinander zu vergleichen. Dazu werden eine im Fluidprogramm vorhandene „Fictitious Boundary Method“ (s. Anhang) und eine neu implementierte ALE-Formulierung eingesetzt. Die Berechnungen für das erste Beispiel wurden auf einer SGI-Workstation (mit einem RISC10000-Prozessor) durchgeführt.

Bei den folgenden Beispielen wird die Wechselwirkung zwischen einer Strömung und einer elastischen Struktur, die in einem Strömungskanal an einem festen Starrkörper befestigt ist, berechnet. Dazu werden die vorgestellten Kopplungsalgorithmen eingesetzt und insbesondere die gestaffelten Verfahren mit den stark gekoppelten Algorithmen verglichen. Diese Beispiele wurden auf einem Parallelrechner mit verteiltem Speicher (CRAY T3E) berechnet, wobei jeweils ein Prozessor für das Fluid- und das Strukturprogramm verwendet wurden. Der Einsatz des Parallelrechners begründet sich zum einen dadurch, daß das Kopplungsinterface GRISSLi eine parallele Umgebung benötigt, und zum anderen durch die Anwendung von parallelen Kopplungsalgorithmen.

6.1 Partikelbewegung in einer Strömung

Als erstes Beispiel wollen wir die Bewegung eines Partikels in einer Strömung und seine Wechselwirkung mit dem Fluid untersuchen. Dazu setzen wir ein kreisförmiges Partikel in einen Strömungskanal und lassen es zuerst mit einer konstanten Einströmgeschwindigkeit umströmen, damit sich ein entsprechendes Strömungsbild einstellen kann. Nach einer bestimmten Zeit verändern wir das konstante Einströmprofil in ein schräges Profil (s. Abbildung 6.1) und untersuchen die Wechselwirkung von Fluid und Partikel. Die genauen Abmessungen sind in der Abbildung 6.1 zu sehen. Als Randbedingungen werden am festen Rand $v = 0$ gesetzt, am Ausströmrand werden Neumann-Randbedingungen und für den Einströmrand ein konstantes Einströmprofil mit $v_x = 8.0 \text{ m/s}$, $v_y = 0 \text{ m/s}$ gewählt. Für das schräge Einströmprofil werden $v_{max} = 16.0 \text{ m/s}$ und $v_{min} = 8.0 \text{ m/s}$ (jeweils nur für die Komponente v_x) und als Parameter für das Fluid die Dichte $\rho_f = 1.18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ und die Viskosität $\nu_f = 1.82 \cdot 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$ verwendet.

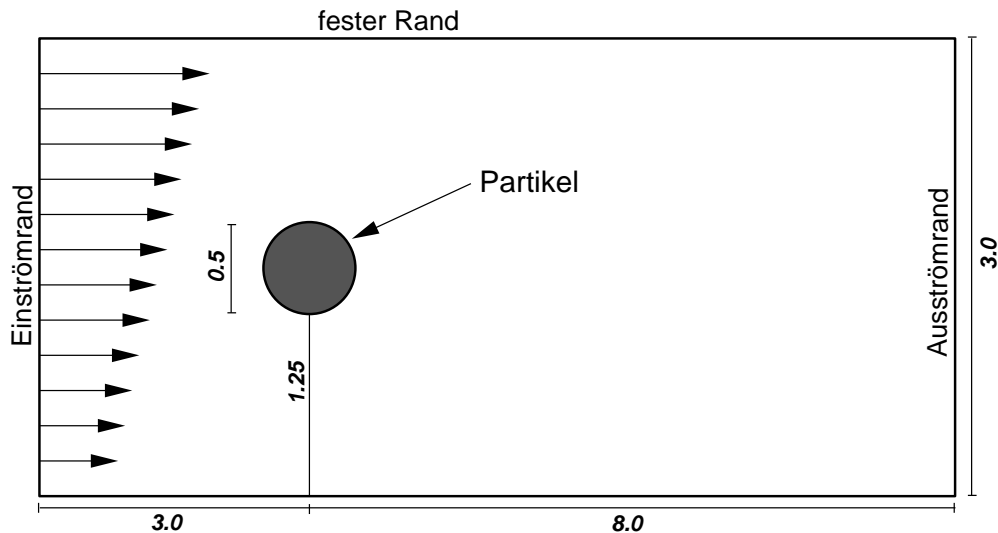


Abbildung 6.1: *Partikel in einem Strömungskanal*

Die Freiheitsgrade des Partikels werden durch seine Verschiebungen u_1 und u_2 in x - und y -Richtung gegeben, die als voneinander unabhängig angenommen werden. Der Rotationsfreiheitsgrad u_θ wird dabei vernachlässigt. Die Bewegungsgleichungen für die Verschiebungen $u = (u_1, u_2)$ werden durch

$$m\ddot{u}_1 = f_1, \quad m\ddot{u}_2 = f_2, \quad (6.1)$$

gegeben, wobei m die Masse des Partikels ist ($m = 0.1 \text{ kg}$) und f_i die auf dieses einwirkenden Fluidkräfte darstellen. Die Fluidkräfte f_i lassen sich aus den Fluidspannungen

folgendermaßen berechnen:

$$f_1 = \int_{\Gamma_s} \sigma_{f,1} \cdot n \, ds, \quad f_2 = \int_{\Gamma_s} \sigma_{f,2} \cdot n \, ds. \quad (6.2)$$

Hierbei ist Γ_s der Rand des Partikels, und $\sigma_{f,1}$ bzw. $\sigma_{f,2}$ sind die jeweiligen x - und y -Komponenten des Spannungstensors σ_f .

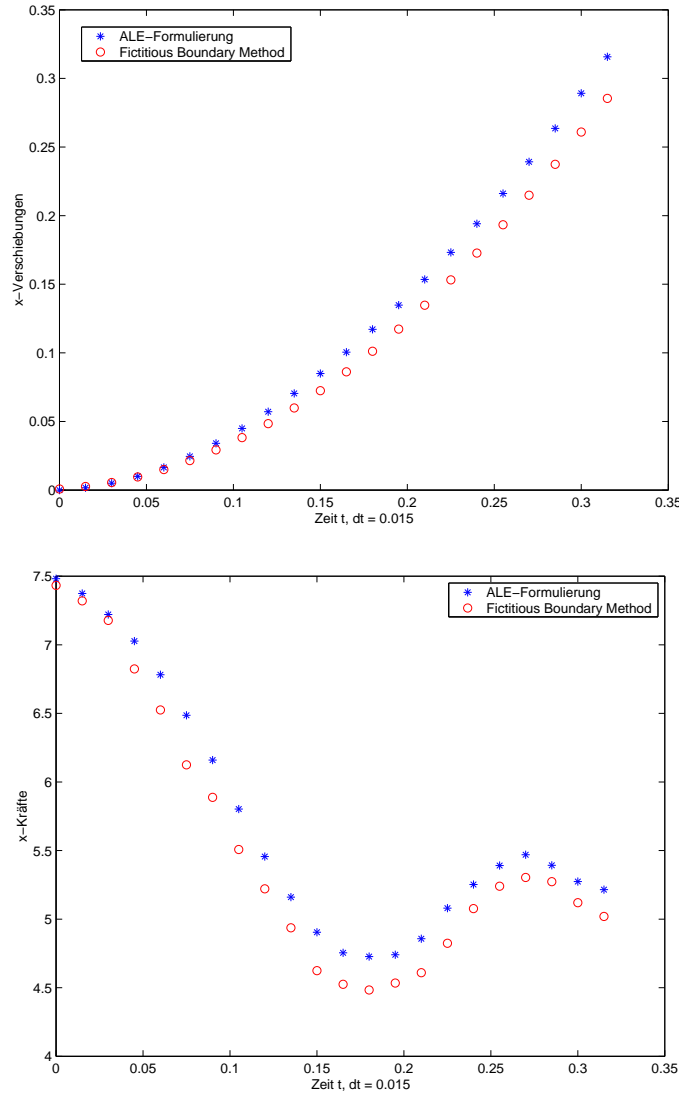


Abbildung 6.2: *Partikelverschiebungen und Fluidkräfte in x-Richtung*

Von dem Partikel werden die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten an das Fluid weitergegeben, um damit die Verformung des Gitters und die Gittergeschwindigkeit zu bestimmen. Außerdem werden dadurch die Randbedingungen für die Geschwindigkeiten im Fluid festgelegt. Für die Zeitintegration der Bewegungsgleichungen des Partikels wird

das Trapez-Verfahren gewählt, die Fluidgleichungen werden mit der Zwischenschritt- θ -Methode berechnet. Als Zeitschrittweite wurde $\Delta t = 0.015$ gewählt.

In diesem Beispiel wurden zwei verschiedene Verfahren zur Behandlung der beweglichen Ränder verwendet, so daß die Ergebnisse miteinander verglichen werden können. Zum einen wurde die in FEATFLOW bereits existierende „Fictitious Boundary Method“ [GPP94] eingesetzt, wobei die Navier-Stokes Gleichungen auf einem sehr feinen Gitter berechnet wurden (sechs Level für das Multigrid-Verfahren, insgesamt 33.792 Fluidelemente), zum anderen wurde die neu implementierte ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen benutzt (mit 5.120 Elementen).

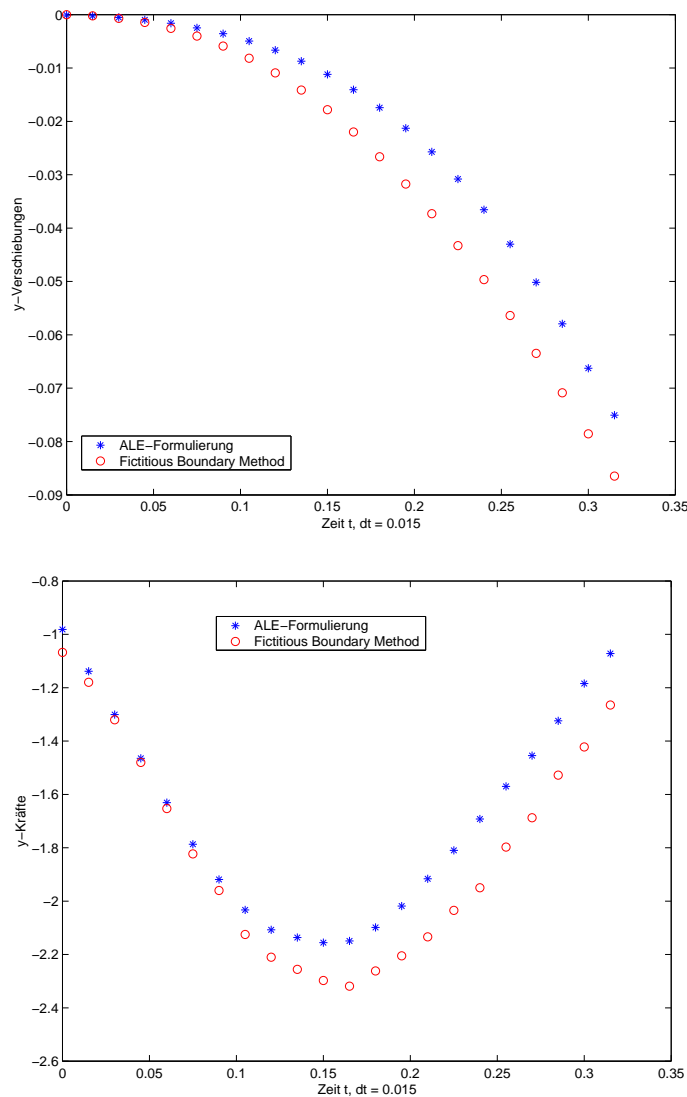


Abbildung 6.3: *Partikelverschiebungen und Fluidkräfte in y-Richtung*

Dieses Beispiel diente in erster Linie als Testfall für den vorhandenen Löser in FEAT-FLOW, der die beweglichen Ränder mit der „Fictitious Boundary Method“ behandelt. Dabei traten die folgenden Probleme auf:

- Der Rand des Partikels wird nicht sehr gut approximiert, obwohl ein sehr feines Gitter gewählt wurde (33.792 Fluidelemente). Dieses führt dazu, daß sich insbesondere am Rand kleine Druckwirbel bzw. Druckstöße bilden, die aufgrund des „kantigen“ Randes entstehen und sich in der Strömung teilweise weiter ausbreiten (s. auch Abbildung 6.4). Dadurch lassen sich auch die Unterschiede bei der Berechnung der Fluidkräfte in den Abbildungen 6.2 und 6.3 (jeweils das untere Bild) erklären.
- Die Rechenzeit steigt mit höherem Level extrem stark an. Für das hier untersuchte Beispiel mit sechs Leveln wurde ungefähr einen Tag lang gerechnet (auf einer SGI Workstation mit einem RISC10000-Prozessor), um eine Gesamtzeit von $T = 0.3s$ zu simulieren. Im Vergleich dazu dauerte eine äquivalente Rechnung mit der ALE-Formulierung ca. eine Stunde.

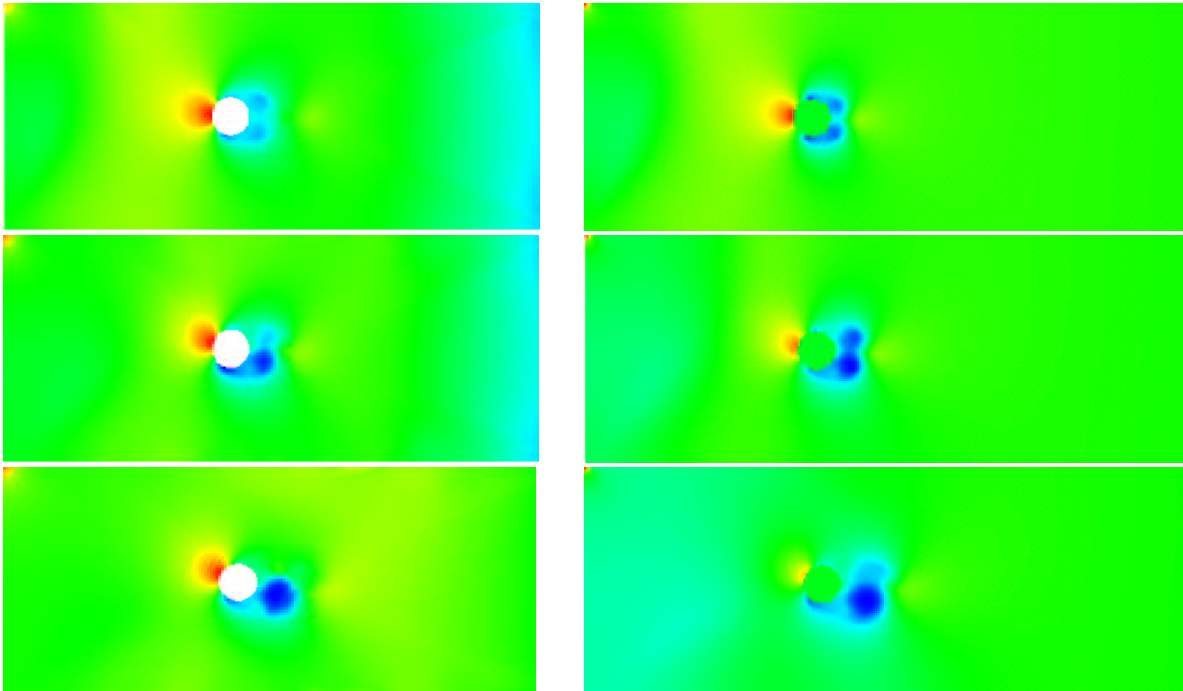


Abbildung 6.4: Druckfelder der Partikelumströmung zu verschiedenen Zeitpunkten (links ALE-Formulierung, rechts „Fictitious Boundary Method“)

Aus diesen Gründen haben wir für die Berechnung der Partikelbewegung nur ein gestaffeltes Verfahren (mit Extrapolation erster Ordnung) eingesetzt und die Ergebnisse der

„Fictitious Boundary Method“ und der ALE-Formulierung miteinander verglichen. Die auf das Partikel wirkenden Fluidkräfte sind in den Abbildungen 6.2 und 6.3 jeweils unten dargestellt. Dabei ist festzustellen, daß sich die Ergebnisse der „Fictitious Boundary Method“ und der von uns verwendeten ALE-Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen trotz der beschriebenen Probleme des ersten Verfahrens nur geringfügig unterscheiden und auf sehr ähnliche Resultate führen. Die Verschiebungen des Partikels sind in Abbildung 6.2 bzw. 6.3 in der oberen Graphik aufgetragen. Abschließend werden in der Abbildung 6.4 die Druckfelder zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Dabei befinden sich auf der linken Seite die Ergebnisse, die mit der ALE-Formulierung berechnet wurden, und auf der rechten Seite jeweils die Resultate mit der „Fictitious Boundary Method“.

6.2 Elastische Struktur in Strömung

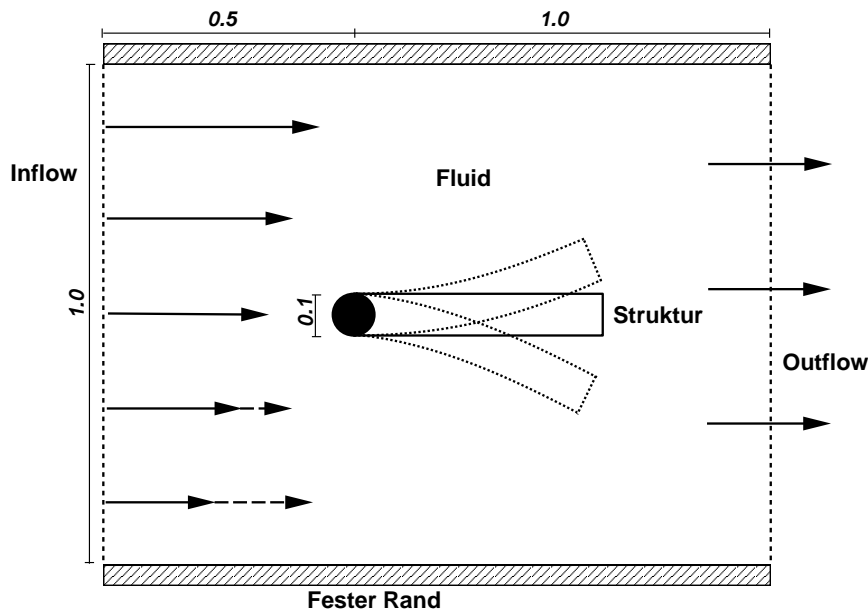


Abbildung 6.5: *Elastische Struktur in Strömung*

In diesem Beispiel wird eine elastische Struktur in einem Strömungskanal untersucht, die aufgrund einer Veränderung des Einströmprofils zu Schwingungen angeregt wird und dadurch wiederum die Strömung beeinflusst (s. Abbildung 6.5). Dazu wird die Struktur, die am vorderen Rand an einem festen Starrkörper (Kreis) befestigt ist, als erstes mit einem konstanten Einströmprofil umströmt, so daß sich ein entsprechendes Strömungsbild einstellen kann (vgl. Abbildung 6.10). Anschließend wird die Einströmung am linken Rand

kontinuierlich in ein schräges Profil geändert, wodurch sich die Struktur verformt und damit eine Wechselwirkung mit dem Fluid entsteht. Nach einer bestimmten Zeit ($t = 0.2s$) wird das Profil wieder kontinuierlich in ein konstantes Einstromprofil umgeformt und dieser Vorgang symmetrisch auf der anderen Seite wiederholt (s. Abbildung 6.5), so daß sich die elastische Struktur zum Schluß wieder in ihren Ausgangszustand zurückverformt. Die Randbedingungen, Geschwindigkeiten und Parameter für das Fluid werden wie im ersten Beispiel gewählt, zusätzlich werden als Größen in der Struktur der Elastizitätsmodul $E = 1.0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, die Poissonzahl $\nu_s = 0.3$ und die Dichte $\rho_s = 0.2 \text{ kg/m}^3$ gesetzt. Als Zeitschrittverfahren werden für die Struktur das Hilber-Hughes-Taylor-Verfahren mit $\alpha = 0$ und im Fluid die θ -Zwischenschrittmethode verwendet, als Zeitschrittweite wurde hier $\Delta t = 0.03$ gewählt. Die räumliche Diskretisierung der elastischen Struktur erfolgt mit 75 vierknotigen „Plane Strain“-Elementen, wobei geometrisch linear gerechnet wird, da in diesem Beispiel keine großen Verformungen auftreten. Dieses führt damit auf ein lineares System in der Struktur. Im Fluid wurden 4096 Rechteckselemente mit 8320 Freiheitsgraden (Druck und Geschwindigkeiten) gewählt. Die Bewegung des Fluidgitters wird mit dem im dritten Kapitel beschriebenen Netzbewegungsalgorithmus berechnet. In der Abbildung 6.6 ist das verformte Gitter zum Zeitpunkt $t = 0.36$ dargestellt. Eine Neuvernetzung des Fluidgitters ist in diesem Beispiel nicht notwendig.

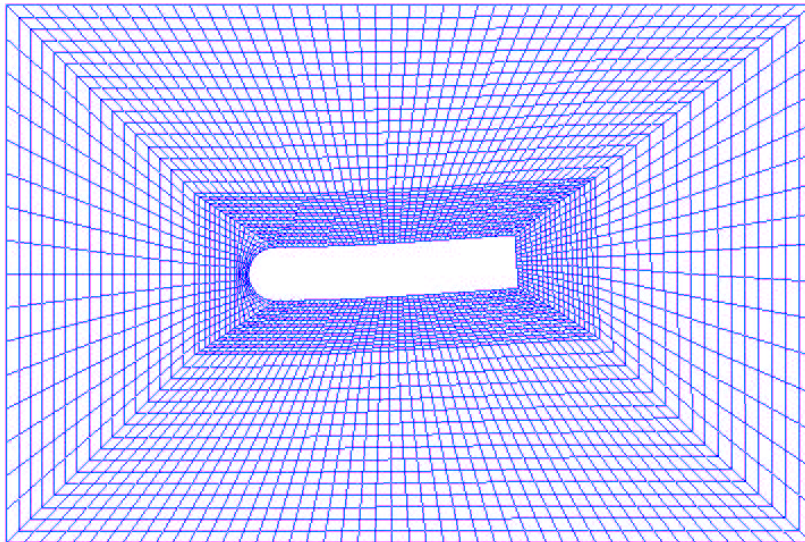


Abbildung 6.6: *Verformung des Fluidgitters zum Zeitpunkt $t = 0.36$ (elastische Struktur in Strömung)*

Im folgenden sollen einige Resultate dieser Simulation vorgestellt und insbesondere die ver-

schiedenen Kopplungsalgorithmen miteinander verglichen werden. Von besonderem Interesse ist in diesem Beispiel die Antwort der elastischen Struktur aufgrund der Veränderung des Einströmprofils. Daher werden als erstes in der Abbildung 6.7 die Verschiebungen des Strukturendes in y -Richtung gezeigt, die mit den verschiedenen Kopplungsalgorithmen berechnet wurden. Als erstes verformt sich die Struktur aufgrund der unterschiedlichen Druckverhältnisse am Rand der Struktur nach unten (s. Abbildung 6.10). Ab dem Zeitpunkt $t = 0.2s$ wird das Einströmprofil schrittweise in ein konstantes Profil geändert, wodurch der Sprung bei den Verschiebungen des Strukturendes zu erklären ist. Zur Zeit $t = 0.3s$ ist das Einströmprofil am linken Rand des Kanals wieder konstant und die Änderung des Profils wird auf der anderen Seite symmetrisch wiederholt (bis $t = 0.4s$). Ab $t = 0.4s$ wird das Profil wieder in ein konstantes Profil umgeformt, so daß die Struktur danach wieder ihren Ausgangszustand einnimmt.

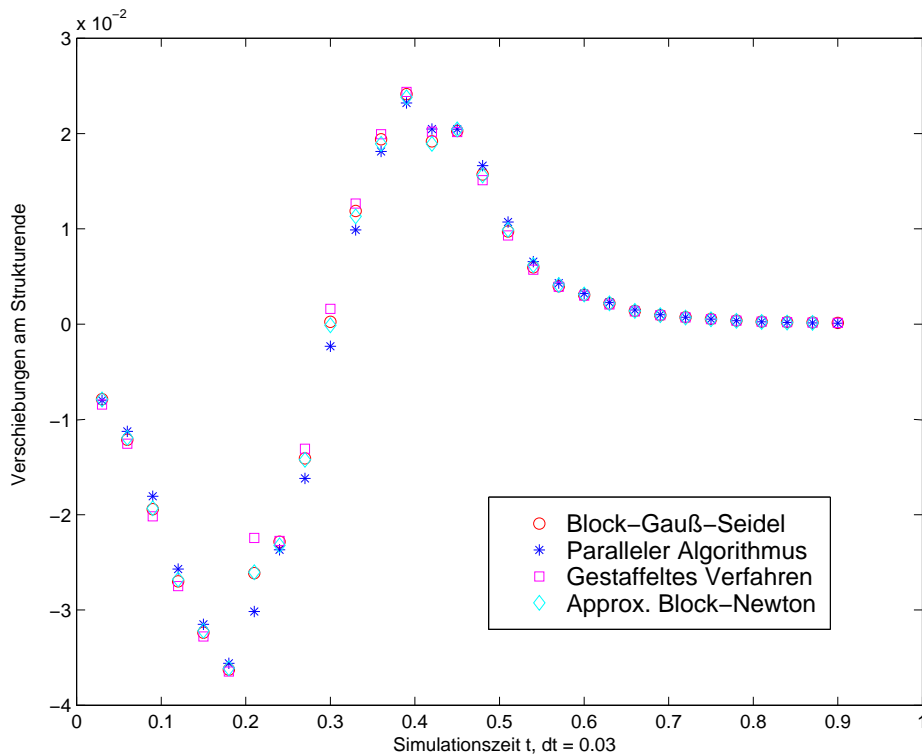


Abbildung 6.7: Verschiebungen des Strukturendes für verschiedene Kopplungsalgorithmen (elastische Struktur in Strömung)

In der Abbildung 6.7 ist deutlich zu erkennen, daß die stark gekoppelten Lösungsverfahren genauere Ergebnisse als das gestaffelte Verfahren liefern, bei dem eine Extrapolation erster Ordnung für die Strukturgrößen des nächsten Zeitschrittes verwendet wurde. Erwartungs-

gemäß produziert der parallele Kopplungsalgorithmus die größten Abweichungen zu den stark gekoppelten Lösungsmethoden, da der Zeitunterschied beim Austausch der Kopplungsvariablen am Interface am größten ist und jeweils nur die Informationen aus dem letzten Zeitschritt verwendet werden. Bei dem gestaffelten Verfahren werden die Resultate dagegen oft überschätzt. Dieses läßt sich durch die Diskontinuität der Geschwindigkeiten am Interface erklären (Extrapolation der Strukturgeschwindigkeiten).

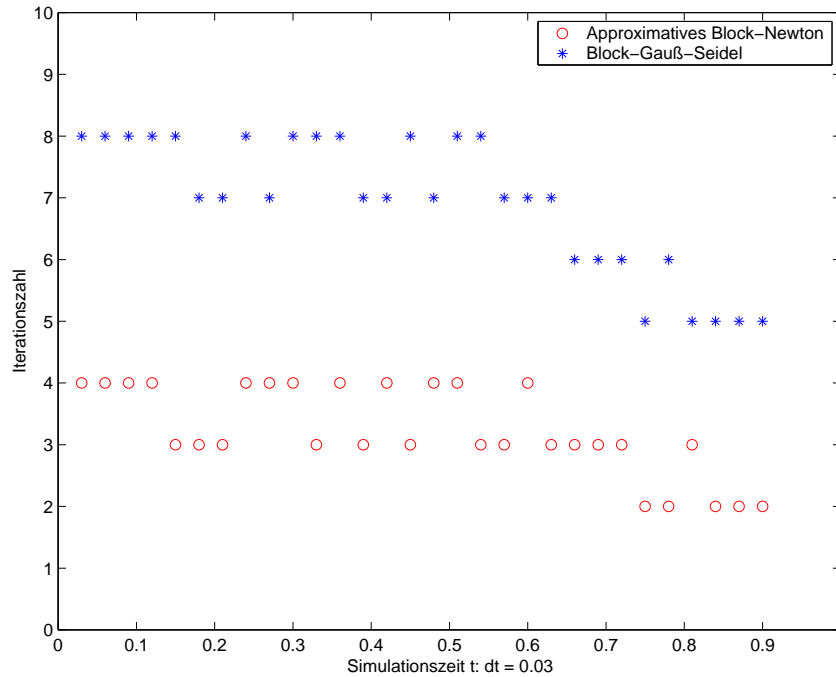


Abbildung 6.8: Anzahl der Iterationen bei den stark gekoppelten Lösungsverfahren (elastische Struktur in Strömung)

Bei den stark gekoppelten Verfahren werden in jedem Zeitschritt Iterationen zur Erfüllung der Kopplungsbedingungen auf dem Interface durchgeführt, die im folgenden genauer untersucht werden sollen. In dem Block-Gauß-Seidel Verfahren wird hier zusätzlich in jeder Iteration eine Relaxation des Interfaces durchgeführt (mit dem festen Relaxationsparameter $\omega = 0.5$), bei dem approximativen Block-Newton Verfahren wurde auf diese Relaxation verzichtet. Dadurch erklären sich auch die geringfügigen Unterschiede zwischen den Ergebnissen für diese beiden Verfahren, die insbesondere im Zeitraum $[0.2s, 0.4s]$ auftreten, wenn die Veränderungen der Struktur und damit auch des Fluidnetzes besonders stark sind. In der Abbildung 6.8 ist die Anzahl der Iterationen der Block-Gauß-Seidel Iteration und des approximativen Block-Newton Verfahrens in jedem Zeitschritt aufgetragen. Dabei wurde beim Block-Gauß-Seidel Verfahren die zusätzliche Relaxation des Interfaces in je-

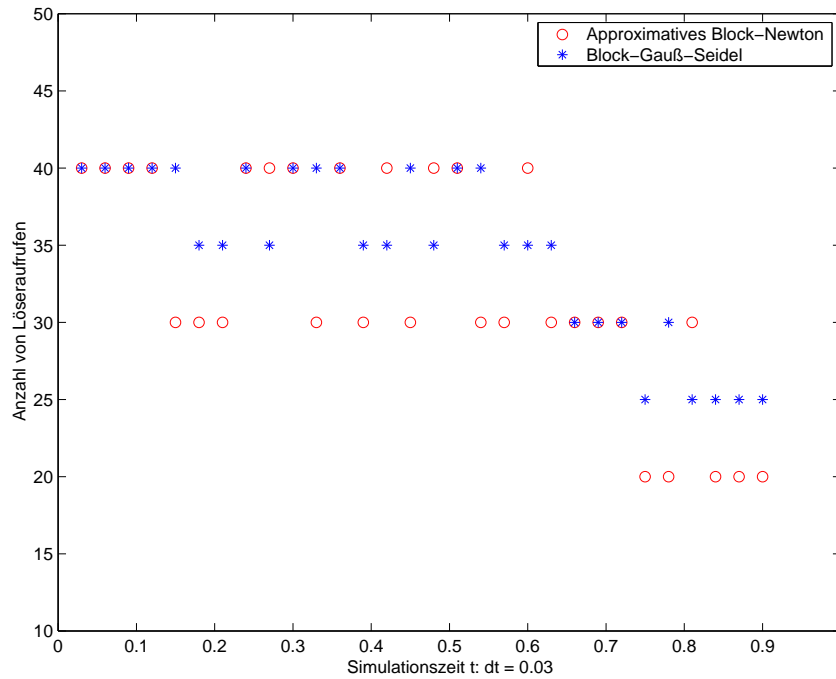


Abbildung 6.9: Anzahl der Lösungsschritte für die stark gekoppelten Lösungsverfahren (elastische Struktur in Strömung)

dem Iterationsschritt weggelassen, um für den Vergleich die gleiche Ausgangssituation zu haben. Es ist zu erkennen, daß die Block-Gauß-Seidel Verfahren mehr Iterationen bis zur Konvergenz benötigen als die Block-Newton Verfahren. Allerdings kennzeichnet die Anzahl der Iterationen nicht den numerischen Aufwand des approximativen Block-Newton Verfahrens, da in diesem wesentlich mehr Aufrufe der iterativen Löser für die Teilprobleme erfolgen. Daher gibt die Anzahl der Löseraufrufe, die in Abbildung 6.9 dargestellt wird, genauere Auskunft über den tatsächlichen numerischen Aufwand. Bei der Block-Gauß-Seidel Iteration werden in jedem Iterationsschritt vier Iterationen des Fluidlösers und ein Aufruf des Strukturlösers, der in diesem Fall die Lösung eines linearen Gleichungssystems bedeutet, durchgeführt. Das approximative Block-Newton Verfahren benötigt zehn Aufrufe der Teillöser (vgl. viertes Kapitel). Insgesamt ist für dieses Beispiel festzustellen, daß die Effizienz des Block-Newton Verfahrens sich kaum von der des Block-Gauß-Seidel Algorithmus unterscheidet. Zur Unterlegung dieser Aussage werden in der Tabelle 6.1 die Gesamtanzahl der Löseraufrufe bzw. der Iterationen der Teillöser dargestellt. Der relativ geringe Unterschied zwischen den beiden stark gekoppelten Lösungsverfahren läßt sich dadurch erklären, daß die Verformungen der elastischen Struktur nicht sehr groß sind (geometrisch linear) und damit das gekoppelte Problem nicht die „volle“ Nichtlinearität

der vorgestellten Modelle enthält. In dem nächsten Beispiel wird man erkennen, daß das approximative Block-Newton Verfahren wesentlich effizienter als die Block-Gauß-Seidel Iteration ist, wenn das stark nichtlinear gekoppelte Problem betrachtet wird (d.h. große Verformungen der Struktur auftreten).

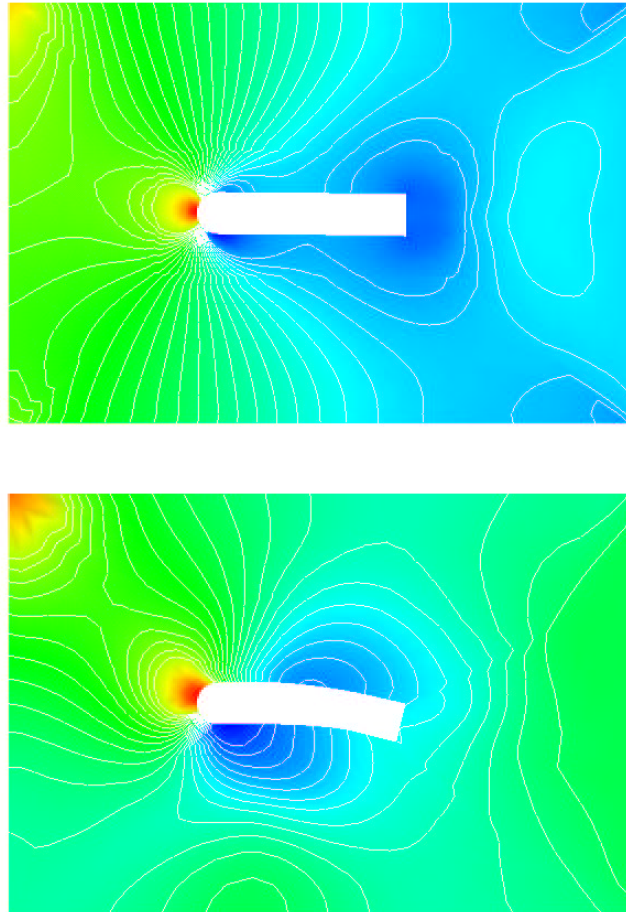


Abbildung 6.10: Druckwerte zur Zeit $t = 0.03$ und $t = 0.18$ für die elastische Struktur in Strömung

In der Abbildung 6.10 werden einige Druckbilder der Strömung gezeigt, die die Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur veranschaulichen. In dem oberen Bild werden die Druckwerte in der Strömung zum Zeitpunkt $t = 0.03s$ gezeigt, nachdem das konstante Einströmprofil in ein geringfügig schräges Profil verändert wurde. Im unteren Bild sind die Verformung der Struktur zur Zeit $t = 0.18s$ und die entsprechenden Druckwerte in der Strömung zu erkennen.

| Verfahren | Anzahl Iterationen | Gesamtzahl von Löseraufrufen |
|----------------------|--------------------|------------------------------|
| Block-Gauß-Seidel | 208 | 1040 |
| Approx. Block-Newton | 97 | 970 |

Tabelle 6.1: Vergleich der stark gekoppelten Verfahren (elastische Struktur in Strömung)

6.3 Wirbelerregte elastische Struktur

Dieses Beispiel behandelt ein in [WR98] vorgestelltes Problem der Fluid-Struktur Wechselwirkung, bei dem große Verformungen der Struktur auftreten. Dieses Problem kann als eine Art Modellbeispiel oder Benchmark-Problem angesehen werden, da es bereits von mehreren Arbeitsgruppen mit verschiedenen Methoden berechnet wurde. So wird in [Bra00] ein adaptiver Fluidlöser auf dieses Beispiel angewendet, und in [HWD01] wird ein monolithischer Lösungsansatz mit Raum-Zeit Finite Elementen zur Lösung verwendet. Wall [WR98], [Wal99] benutzt – wie in unserer Arbeit – partitionierte Verfahren, wobei allerdings nur gestaffelte Algorithmen eingesetzt werden.

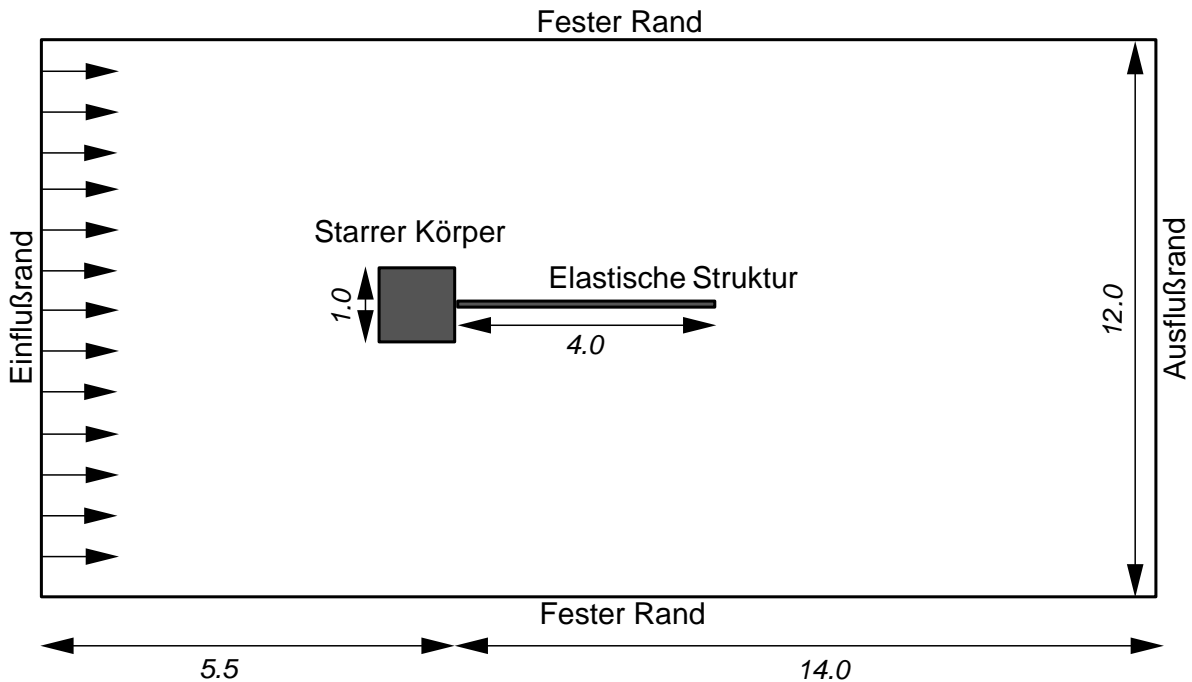


Abbildung 6.11: Wirbelerregte elastische Struktur

In diesem Beispiel wird eine elastische Struktur in einer Strömung untersucht, die aufgrund von in der Strömung entstehenden Wirbeln belastet wird und dadurch eine Wechselwirkung mit dem Fluid induziert. Die elastische Struktur ist an einem quadratischen Starrkörper befestigt, von dem bei bestimmten Strömungsgeschwindigkeiten und Reynoldszahlen Wirbel abreißen (vgl. Abbildung 6.11). Durch diese Wirbel wird die Struktur zu Schwingungen angeregt. Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel ergeben sich hier wesentlich größere Fluidkräfte, die zu großen Verformungen der Struktur führen. Aus diesem Grund muß für dieses Beispiel eine geometrisch nichtlineare Elastodynamik als Modell für die Struktur gewählt werden. Dieses führt zu einem stark nichtlinear gekoppelten Problem, das mit einem gestaffelten Verfahren und den beschriebenen stark gekoppelten Lösungsverfahren berechnet werden soll.

Als Parameter für die Simulation werden für die Struktur der Elastizitätsmodul $E = 2.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, die Poissonzahl $\nu_s = 0.35$ und die Dichte $\rho_s = 0.1 \text{ kg/m}^3$ und für das Fluid die Dichte $\rho_f = 1.18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, die Viskosität $\nu_f = 1.82 \cdot 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$ und die Einströmgeschwindigkeit $v_x = 51.3 \text{ m/s}$, $v_y = 0 \text{ m/s}$ gewählt. Die Ausgangsgeometrie mit den genauen Abmessungen ist in der Abbildung 6.11 dargestellt. Die Breite der elastischen Struktur beträgt $d = 0.06$. Wir zeigen die Resultate der Simulation im Zeitraum von $t = 1\text{s}$ bis $t = 4\text{s}$, in dem die Struktur durch die sich ablösenden Wirbeln zu großen Schwingungen angeregt wird. Die Bewegung der elastischen Struktur wird dabei von der ersten Eigenform dominiert.

Wie beim letzten Beispiel erfolgt die Zeitintegration der Strukturgleichungen mit dem Hilber-Hughes-Taylor-Verfahren, wobei $\alpha = -\frac{1}{6}$ gesetzt wird. Die raumdiskreten Fluidgleichungen werden mit der Zwischenschritt- θ -Methode berechnet. Als Zeitschrittweite wird $\Delta t = 0.02$ gewählt. Die Struktur wird mit 40 vollintegrierten Elementen (mit neun Knoten) im Raum diskretisiert, im Fluid werden 10.016 Rechteckselemente mit 19.744 Freiheitsgraden verwendet. Die Bewegung des Fluidnetzes wird wieder mit dem Netzbewegungsalgorithmus, der im dritten Kapitel eingeführt wurde, berechnet. In der Abbildung 6.16 werden die Gitter zur Anfangskonfiguration $t = 0.0$ und zum Zeitpunkt $t = 1.2$ gezeigt. Eine Neuvernetzung des Strömungsgebietes ist auch für dieses Beispiel nicht notwendig, obwohl die Verformungen der Struktur wesentlich größer sind als bei dem vorhergehenden Beispiel. Dieses spricht für die Qualität des verwendeten Netzbewegungsalgorithmus.

Als erstes soll versucht werden, mit einem gestaffelten Verfahren (unter Verwendung einer Extrapolation erster Ordnung für die Strukturvariablen) die Lösung dieses gekoppelten Problems zu berechnen. Dabei zeigt sich jedoch, daß bei einer Wahl von $\Delta t = 0.02$ das gestaffelte Verfahren instabil wird (s. Abbildung 6.12). Die Verformungen der Struktur werden dabei zu groß, so daß die Konvergenzbedingungen des Fluid- und Strukturlösers in jedem Zeitschritt nicht mehr erfüllt werden können. Weiterhin kann man bei dem

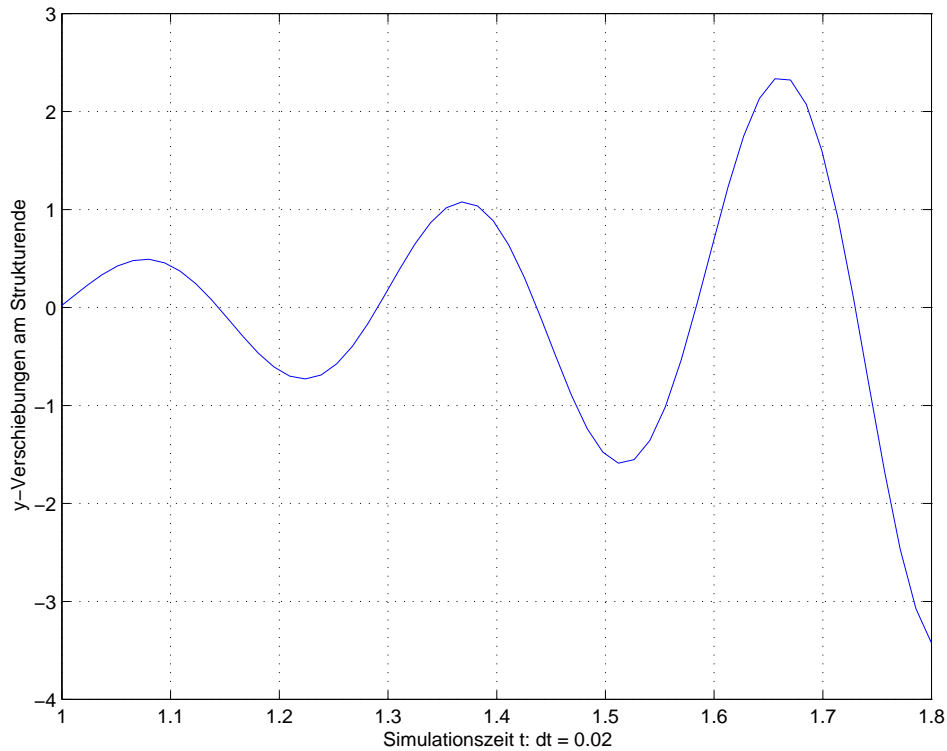


Abbildung 6.12: *Instabilität des gestaffelten Verfahrens für $\Delta t = 0.02$ (wirbelerregte elastische Struktur)*

gestaffelten Verfahren eine Phasenverschiebung der Lösung erkennen, wenn man diese Lösung mit dem Ergebnis der stark gekoppelten Lösungsverfahren vergleicht (s. Abbildung 6.13). Daher wurde diese Rechnung nach $t = 1.8s$ abgebrochen.

Die Resultate, die mit den stark gekoppelten Lösungsverfahren erzielt wurden, werden in der Abbildung 6.13 gezeigt. Dabei werden sehr ähnliche vertikale Verschiebungen wie in [WR98] und in [HWD01] erhalten. Die kleinen Unterschiede zu den Ergebnissen von Wall lassen sich durch die Verwendung eines gestaffelten Verfahrens durch Wall erklären, wobei ein sehr kleiner Zeitschritt ($\Delta t = 0.01$) verwendet wurde. Die Verformungen der Block-Gauß-Seidel Iteration und des approximativen Block-Newton Verfahrens unterscheiden sich nicht, da bei beiden Verfahren eine Iteration für die Kopplungsbedingungen durchgeführt wurde. Weiter wurde in beiden Methoden auf eine Relaxation des Interfaces verzichtet und nur – wie bei dem gestaffelten Verfahren – ein Prädiktor für die Strukturvariablen bzw. die Position des Interfaces eingesetzt. Bei den stark gekoppelten Verfahren ist keine Instabilität zu erkennen, und die Lösung nähert sich einem periodischen Zustand an (vgl. Abbildung 6.13).

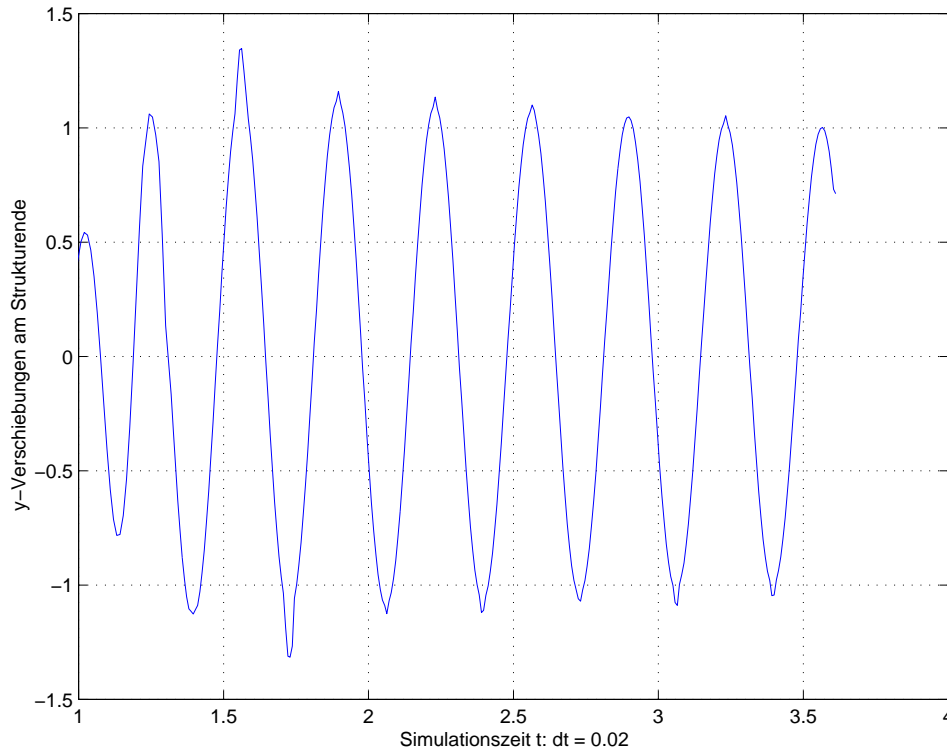


Abbildung 6.13: *Verschiebungen des Strukturendes für die stark gekoppelten Lösungsverfahren (wirbelerregte elastische Struktur)*

Im folgenden sollen wie im vorhergehenden Beispiel die Effizienz der Block-Gauß-Seidel Iteration mit der des approximativen Block-Newton Verfahrens verglichen werden. In Abbildung 6.14 wird die Anzahl der Iterationen dargestellt, die die stark gekoppelten Lösungsverfahren in jedem Zeitschritt bis zur Konvergenz benötigen. Zur Übersichtlichkeit wird nur der Zeitraum von $t = 1s$ bis $t = 2s$ gezeigt. Es ist hier schon zu erkennen, daß das Block-Gauß-Seidel Verfahren wesentlich mehr Iterationen pro Zeitschritt benötigt. Ähnlich verhält es sich bei der Anzahl der Löseraufrufe. Bei diesem Beispiel werden in dem Block-Gauß-Seidel Verfahren vier Iterationen des Fluidlösers und zwei Iterationen des Strukturlösers durchgeführt, da das Strukturproblem in diesem Beispiel auch nicht-linear ist. Das approximative Block-Newton Verfahren benötigt pro Iteration insgesamt zehn Aufrufe der Teillöser (wie in Kapitel 4 beschrieben). Die Anzahl der Löseraufrufe in jedem Zeitschritt ist in Abbildung 6.15 zu sehen. Das approximative Block-Newton Verfahren ist hier wesentlich besser als die Block-Gauß-Seidel Iteration, was man auch an der Gesamtzahl der Löseraufrufe in der Tabelle 6.2 erkennen kann. Es ist also festzustellen, daß sich das approximative Block-Newton Verfahren effizienter als die Block-Gauß-Seidel

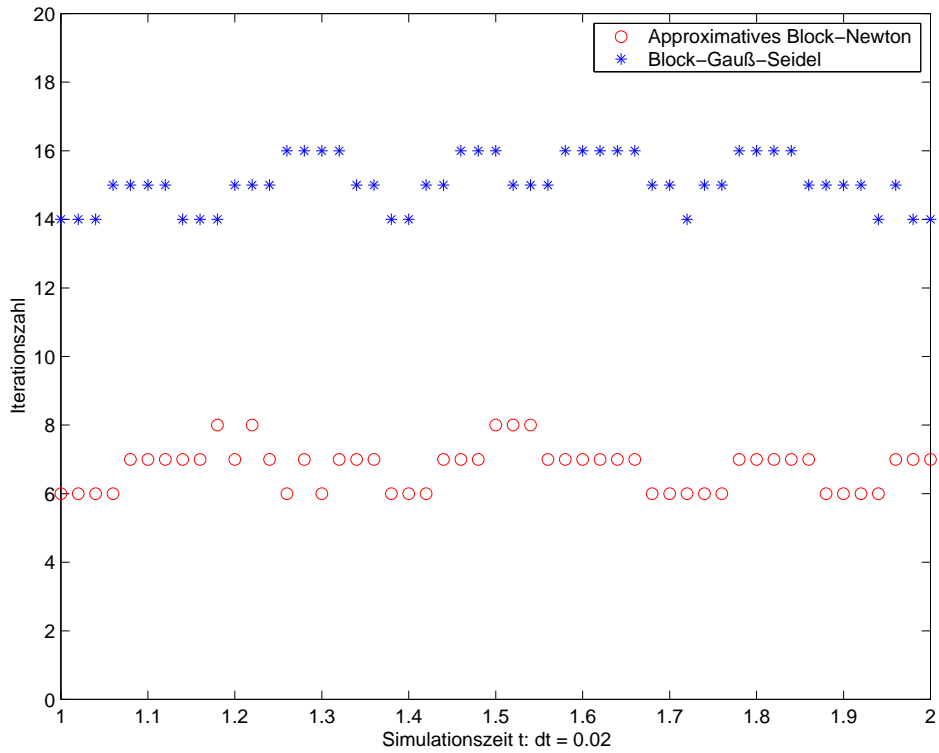


Abbildung 6.14: Anzahl der Iterationen bei den stark gekoppelten Lösungsverfahren (wirbelerregte elastische Struktur)

Methode verhält, wenn stark nichtlinear gekoppelte Probleme der Fluid-Struktur Interaktion mit großen Strukturverformungen berechnet werden.

Um die Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur in diesem Beispiel zu veranschaulichen, werden in der Abbildung 6.17 einige Druckbilder der Strömung gezeigt. Dabei werden verschiedene Druckbilder während einer Schwingungsperiode dargestellt, in denen die Ablösung der Wirbel und die Interaktion der Struktur mit dem Fluid deutlich zu erkennen ist.

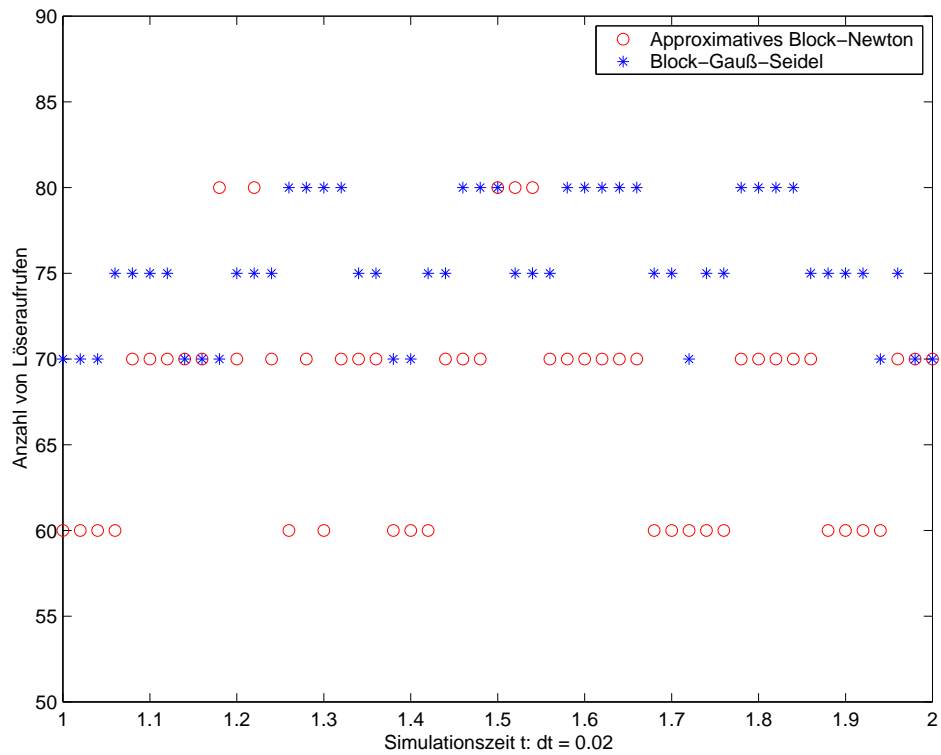


Abbildung 6.15: Anzahl der Lösungsschritte für die stark gekoppelten Lösungsverfahren (wirbelerregte elastische Struktur)

| Verfahren | Anzahl Iterationen | Gesamtzahl von Löseraufrufen |
|----------------------|--------------------|------------------------------|
| Block-Gauß-Seidel | 769 | 3845 |
| Approx. Block-Newton | 344 | 3440 |

Tabelle 6.2: Vergleich der stark gekoppelten Verfahren (wirbelerregte elastische Struktur)

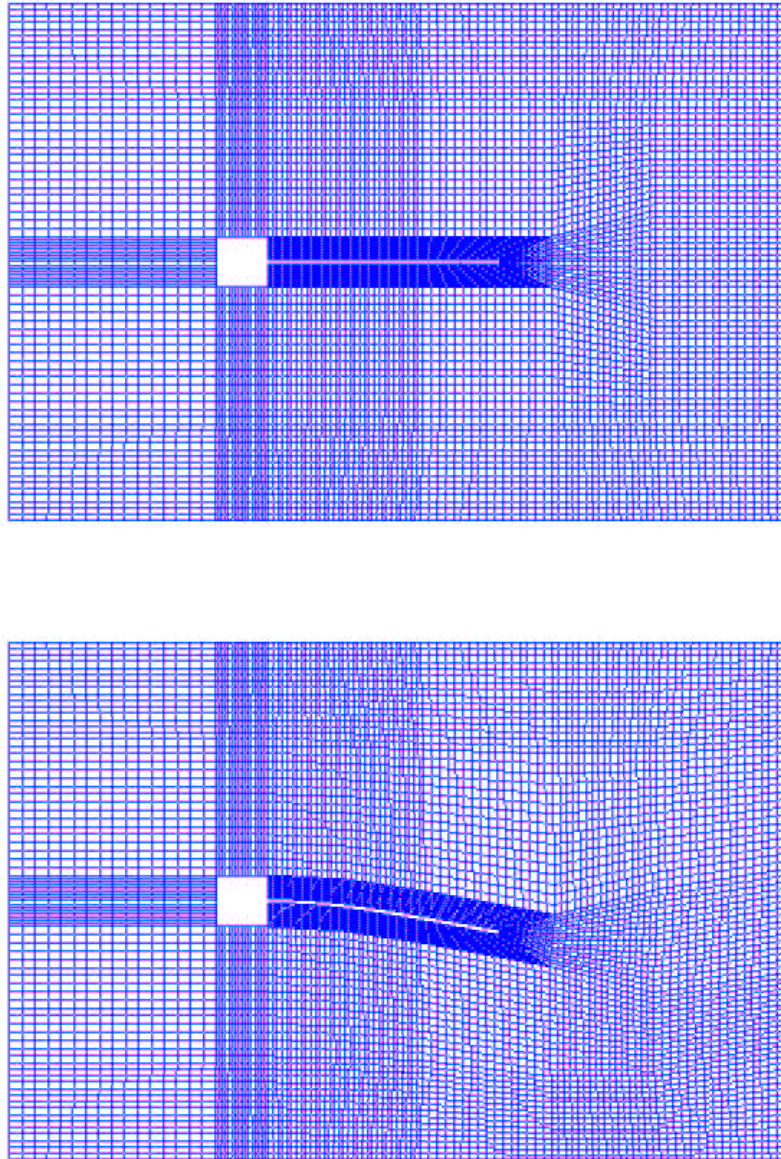


Abbildung 6.16: *Verformung des Netzes zu verschiedenen Zeitpunkten*

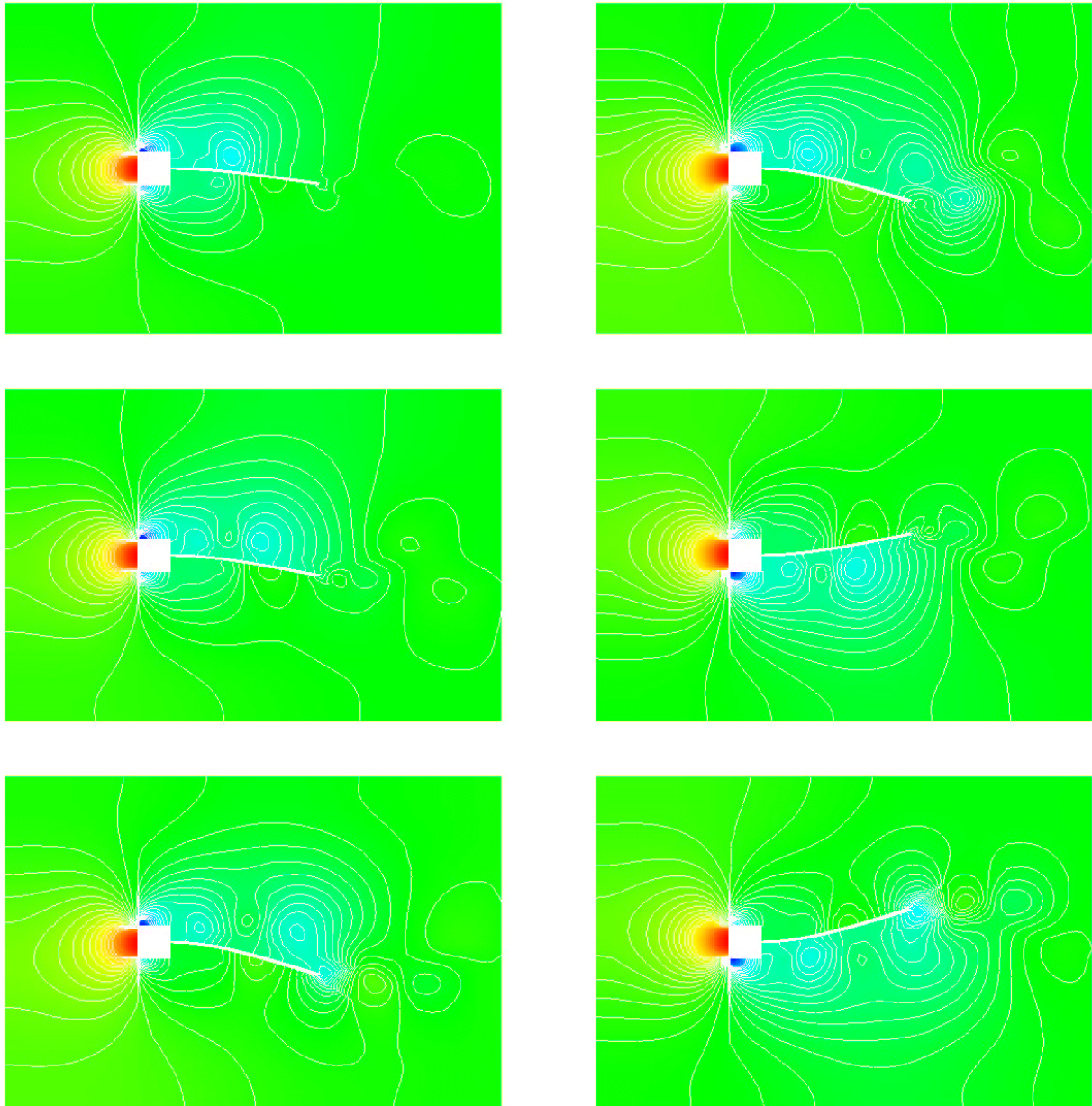


Abbildung 6.17: Druckbilder der wirbelerregten elastischen Struktur zu verschiedenen Zeitpunkten

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden stark gekoppelte Probleme der Fluid-Struktur Interaktion mathematisch untersucht und numerisch simuliert. Als mathematische Modelle für das Fluid wurden die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen auf einem sich zeitlich veränderlichen Gebiet und für die Struktur eine geometrisch nichtlineare und materiell lineare Elastodynamik gewählt. Durch die Wahl dieser Modelle lassen sich zahlreiche realistische Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung darstellen.

Zur numerischen Simulation dieser stark gekoppelten Probleme wurden partitionierte Verfahren eingesetzt, die das Multi-Physics Problem in seine Teilprobleme und die Kopplungsbedingungen aufteilen und anschließend die Teilprobleme mit den entsprechenden Randbedingungen getrennt voneinander berechnen. Dadurch können in den Teilproblemen effiziente Diskretisierungs- und Lösungsverfahren verwendet werden. Dieses erlaubt insbesondere den Wiedereinsatz von existierender Software für das Fluid- und Strukturproblem. Durch die Anwendung der partitionierten Verfahren ergeben sich verschiedene Probleme bzw. Fragestellungen, die in dieser Arbeit untersucht wurden. Zum einen müssen die Löser für die Teilprobleme und zum anderen die vorhandenen Programme für das Fluid- und das Strukturproblem miteinander gekoppelt werden, um das stark gekoppelte Interaktionsproblem zu berechnen.

Bei der räumlichen Diskretisierung der Kopplungsbedingungen treten Probleme auf, da die Teillöser im allgemeinen unterschiedliche Diskretisierungstechniken verwenden und dadurch am Interface inkompatible Gitter aufeinandertreffen. Dieses führt dazu, daß spezielle Algorithmen für den Geometrie- und Lasttransfer entwickelt werden müssen. Diese Verfahren wurden in dieser Arbeit vorgestellt und diskutiert.

Für die zeitliche Diskretisierung der Kopplungsbedingungen wurden in dieser Arbeit verschiedene Kopplungsalgorithmen präsentiert. Diese reichten von schwach gekoppelten Algorithmen (gestaffelte Verfahren) bis zu stark gekoppelten Lösungsverfahren (Block-Gauß-Seidel, Block-Newton). Für die gestaffelten Verfahren wurde anhand von mehreren Beispielen gezeigt, daß diese numerisch instabil werden und daher nur mit kleinen Zeit-

schritten und sehr großem Berechnungsaufwand angewendet werden können. Aus diesem Grund sind stark gekoppelte Lösungsverfahren notwendig, die die Kopplungsbedingungen in jedem Zeitschritt iterativ erfüllen. Im wesentlichen wurden dazu bisher Block-Gauß-Seidel Iterationen und damit verwandte Relaxationsverfahren eingesetzt. Eine numerische Analyse dieser iterativen Verfahren in dieser Arbeit zeigte, daß das Block-Gauß-Seidel Verfahren eine höhere zeitliche Konvergenzordnung als das gestaffelte Verfahren besitzt. Außerdem wurde nachgewiesen, daß die Block-Gauß-Seidel Iteration nicht immer konvergieren muß. Aus diesem Grund wurde hier als Alternative ein stark gekoppeltes Lösungsverfahren vorgestellt, das auf Block-Newton Verfahren beruht und die dabei benötigten Ableitungen numerisch approximiert.

Die Kopplung der verschiedenen Softwaretools für das Fluid- und das Strukturproblem erfolgte in dieser Arbeit über das Kopplungsinterface GRISSLi, das für die Kopplung von parallelen Anwendungsprogrammen auf einem Parallelrechner entwickelt wurde. In GRISSLi wurden die entwickelten Kopplungsalgorithmen aufgrund der vorhandenen Flexibilität implementiert und auf einer CRAY T3E an verschiedenen Beispielen getestet.

Die gestaffelten Verfahren, die Block-Gauß-Seidel Iteration und das approximative Block-Newton Verfahren wurden in dieser Arbeit auf zwei komplexe zweidimensionale Beispiele der Fluid-Struktur Wechselwirkung angewendet und miteinander verglichen. Dabei wurde am zweiten Beispiel die Instabilität des gestaffelten Verfahrens demonstriert. Als Resultat für die stark gekoppelten Lösungsverfahren läßt sich festhalten, daß die Block-Newton Iteration wesentlich weniger Iterationen als das Block-Gauß-Seidel Verfahren benötigt, allerdings die Anzahl der eingesetzten Lösungsschritte (d.h. der numerische Aufwand) bei dem approximativen Block-Newton Verfahren nur etwas geringer ist als bei der Block-Gauß-Seidel Iteration. Wenn das Problem wie bei dem zweiten Beispiel eine starke Nichtlinearität besitzt (z.B. durch große Strukturverformungen), dann ist der numerische Aufwand des approximativen Block-Newton Verfahrens jedoch wesentlich kleiner als bei der Block-Gauß-Seidel Iteration. Ein weiterer Vorteil des Block-Newton Verfahrens besteht in den Konvergenzeigenschaften. So wurde in dieser Arbeit gezeigt, daß die Block-Gauß-Seidel Verfahren nicht immer konvergent sind, wohingegen das Block-Newton Verfahren unter schwächeren Bedingungen an die Lösung konvergiert. Die approximativen Block-Newton Verfahren bieten insgesamt also eine reale Alternative zu den Block-Gauß-Seidel Verfahren und stellen eine sinnvolle Erweiterung zu diesen dar. Allerdings müssen noch weitere Möglichkeiten zur starken Kopplung der Teillöser untersucht werden – wie z.B. nichtlineare Konjugierte Gradienten Verfahren (nichtlineares GMRES) oder Gebietszerlegungsmethoden („Domain Decomposition“), die auch nur die Iterationsoperatoren der Teilprobleme verwenden.

Weitere offene Probleme, die bei der Berechnung der Fluid-Struktur Interaktion mit partitionierten Verfahren auftreten und in dieser Arbeit behandelt wurden, sind die Fragen der

Last- und Energieerhaltung am Interface in jedem Zeitschritt. Insbesondere die Mortar-Element Methoden bieten hier einen interessanten Ansatz, um den Lasttransfer mathematisch zu untersuchen. Außerdem muß noch die Frage genauer untersucht werden, welcher Zusammenhang zwischen der Energieerhaltung und der Stabilität der partitionierten Verfahren besteht.

Eine sehr große Bedeutung hat auch die Weiterentwicklung der geometrischen Erhaltungsgesetze („Geometric Conservation Law“). So ist die Bedeutung und der Einfluß dieser geometrischen Bilanzgleichungen erst in den letzten Jahren richtig erkannt worden. Insbesondere die Stabilität und auch die Konvergenzordnung des Zeitschrittverfahrens im Fluidproblem wird davon wesentlich beeinflußt.

Es existieren also sowohl auf dem Gebiet der Löserkopplung als auch in den verschiedenen Teilgebieten noch zahlreiche Probleme und Fragestellungen, die in den kommenden Jahren erforscht werden können.

Anhang A

Das eindimensionale Modellbeispiel

Eine numerische Analyse der partitionierten Verfahren wird oft an eindimensionalen Modellbeispielen durchgeführt, da die Analyse von dreidimensionalen Problemen der Fluid-Struktur Interaktion aufgrund der Komplexität dieser Probleme häufig nicht möglich ist. Das bekannteste und am häufigsten untersuchte Modellbeispiel stammt von Piperno [Pip94], [PFL95], in dem die Bewegung eines starren Kolbens in einem Strömungskanal betrachtet wird (s. Abbildung A.1). Das Fluid in dem Kanal wird dabei als eindimensional angenommen und durch die kompressiblen Euler-Gleichungen modelliert. In der ersten Arbeit [PFL95] werden die Fluidgleichungen um den Gleichgewichtszustand linearisiert und Stabilitätsaussagen für die gestaffelten Verfahren mit Hilfe von Energiemethoden hergeleitet. Die zweite Arbeit [Pip94] behandelt das nichtlineare Fluidproblem. Aufbauend auf diesem Artikel werden in [Blo98] die gestaffelten Algorithmen mit einem monolithischen Lösungsansatz verglichen. In dieser Arbeit wurden die betrachteten stark gekoppelten Lösungsverfahren mit beiden Methoden verglichen.

Ein weiteres eindimensionales Modellbeispiel wird in der Dissertation von Grandmont [Gra98] behandelt, bei dem das Fluid durch die nichtlineare Burgers-Gleichung und die Struktur durch eine eindimensionale Wellengleichung modelliert wird. Dabei werden verschiedene explizite und ein semi-impliziter Kopplungsalgorithmus mathematisch auf ihre Konsistenz und Stabilität untersucht. Für das semi-implizite Lösungsverfahren wird gezeigt, daß es absolut stabil ist, für die expliziten Verfahren ergibt sich nur bedingte Stabilität. In diesem Beispiel besitzt das Fluidmodell allerdings keine physikalische Bedeutung, so daß wir in dieser Arbeit das Modellbeispiel aus [Pip94] betrachtet haben.

Wir wollen in diesem Kapitel das Modellbeispiel und die räumliche und zeitliche Diskretisierung des eindimensionalen gekoppelten Problems kurz vorstellen. Im wesentlichen werden ähnliche Techniken wie im dritten Kapitel eingesetzt, allerdings existieren einige kleine Unterschiede (wie z.B. die Diskretisierung der Fluidgleichungen mit Finiten Volumen), die hier genauer dargestellt werden. Für eine ausführliche Beschreibung verweisen wir auf [Pip94] und [Blo98], deren Bezeichnungen wir in diesem Abschnitt zum größten

Teil übernehmen. Das Modellbeispiel, das häufig auch als „Kolbenproblem“ bezeichnet wird, besteht aus einer Fluidkammer, die am rechten Rand durch einen sich bewegenden Kolben geschlossen ist (s. Abbildung A.1). Der linke Rand der Kammer wird als fest angenommen und befindet sich im Nullpunkt der x -Achse.

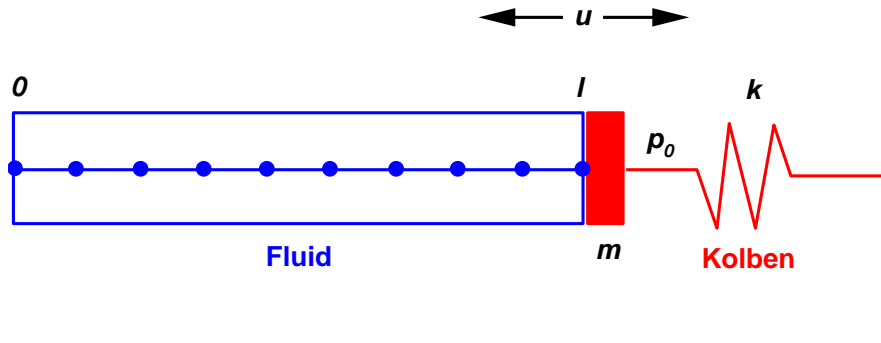


Abbildung A.1: Geometrie des Modellbeispiels

Die eindimensionale Strömung in der Kammer wird durch die kompressiblen Euler-Gleichungen modelliert. In Gleichgewichtslage hat die Kammer eine Länge l und das System besitzt den folgenden Zustand:

- Die Strömung ist gleichförmig mit Geschwindigkeit $v = 0$, und der Druck p in der Strömung ist gleich dem externen Druck p_0 .
- Der Kolben bewegt sich nicht und ist an der Position $x = l$.

Das Kolbenproblem läßt sich mathematisch folgendermaßen formulieren: u seien die Verschiebungen des Kolbens, so daß das Fluidproblem im Gebiet $[0, l + u]$ gelöst werden muß. Die Euler-Gleichungen für das kompressible Fluid lauten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v(E + p)) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Hierbei sind ρ die Dichte des Fluides, v die Geschwindigkeiten im Fluid, p der Druck und E die Energie des Systems. Das Fluid wird als ein perfektes Gas angenommen, und der Druck ergibt sich aus der Gleichung

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho v^2\right), \quad (\text{A.4})$$

wobei $\gamma = 1.4$ gesetzt wird. Als Randbedingungen für das Fluid erhält man

$$v(0) = 0, \quad v(l + u) = \dot{u} \quad (\text{A.5})$$

mit der Kolbengeschwindigkeit \dot{u} . Die Bewegung der Struktur wird durch die einfache Feder-Dämpfer-Gleichung

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + ku = f \quad (\text{A.6})$$

gegeben, wobei m , d und k die Masse, interne Dämpfung und Steifigkeit der Struktur sind. Die äußere Kraft f ergibt sich aus dem anliegenden Druck

$$f = p(l + u) - p_0. \quad (\text{A.7})$$

Für die Struktur werden Anfangsbedingungen von der Form

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0 \quad (\text{A.8})$$

vorgegeben. Als Zeitschrittverfahren für die Struktur wählen wir das bekannte Newmark-Verfahren, für das mit den Parametern γ und β gilt:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t w^n + \frac{\Delta t^2}{2} a^{n+2\beta}, \quad (\text{A.9})$$

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t a^{n+\gamma}. \quad (\text{A.10})$$

Hierbei sind u^{n+1} die Verschiebungen, w^{n+1} die Geschwindigkeiten und a^{n+1} die Beschleunigungen der Struktur zum Zeitpunkt t^{n+1} . Weiter sind die Größen $z^{n+\theta}$ für $\theta \in [0, 1]$ durch

$$z^{n+\theta} = (1 - \theta)z^n + \theta z^{n+1} \quad (\text{A.11})$$

definiert. Die Beschleunigungen a^{n+1} lassen sich aus der Gleichung

$$ma^{n+1} + dw^{n+1} + ku^{n+1} = f^{n+1} \quad (\text{A.12})$$

berechnen. Für die Werte $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ erhält man das bekannte Trapezverfahren. Zur Lösung des Strukturproblems ist also in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Zur räumlichen Diskretisierung der Fluidgleichungen sollen hier Finite Volumen Verfahren verwendet werden. Dazu schreiben wir die kompressiblen Euler-Gleichungen in Erhaltungsförm als

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_f} W \, dx \right) + \int_{\Omega_f} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \, dx = 0 \quad (\text{A.13})$$

mit den konservativen Variablen $W = (\rho, \rho v, E)^t$ und dem durch eine ALE-Formulierung modifizierten Fluß-Vektor

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \rho \bar{v} \\ \rho v \bar{v} + p \\ E \bar{v} + p v \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

wobei $\bar{v} = v - \dot{x}$ mit der Gittergeschwindigkeit \dot{x} gilt. Ω_f bezeichnet hierbei das aktuelle Fluidgebiet. Zur Diskretisierung der Erhaltungsgleichung (A.14) wird ein implizites Finite Volumen Schema verwendet. Dazu zerlegen wir das Intervall $[0, l]$ in N gleichgroße Intervalle mit den Gitterpunkten x_0, x_1, \dots, x_N . Die Finite Volumen Zellen C_i werden durch die jeweiligen Mittelpunkte der Intervalle begrenzt, d.h. $C_i := [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$. Das implizite Finite Volumen Schema wird dann durch

$$A_i^{n+1}W_i^{n+1} - A_i^nW_i^n + \Delta t (\bar{\Phi}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) - \bar{\Phi}(W_{i-1}^{n+1}, W_i^{n+1})) = 0. \quad (\text{A.15})$$

für $i = 1, \dots, n$ gegeben. Hierbei bezeichnen A_i^n die Fläche der i -ten Zelle $C_i^n := [x_{i-\frac{1}{2}}^n, x_{i+\frac{1}{2}}^n]$ und W_i^n die Werte der konservativen Variablen in den Knoten x_i zur Zeit t_n . Die zeitliche Veränderung der Zellflächen wird aufgrund der Gittergeschwindigkeiten $\dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^n$ durch ein explizites Verfahren berechnet:

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^n, \\ A_i^{n+1} &= A_i^n + \Delta t (\dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^n - \dot{x}_{i-\frac{1}{2}}^n), \\ &= x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}. \end{aligned}$$

Weiter ist $\bar{\Phi}$ eine numerische Approximation des Flußes, so daß gilt

$$\bar{\Phi}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) \approx \bar{F}(x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}). \quad (\text{A.16})$$

Der Fluß-Vektor $\bar{\Phi}$ wird nach dem Schema von Van Leer [Blo98] diskretisiert:

$$\bar{\Phi}(W_i^{n+1}, W_{i+1}^{n+1}) = \bar{\Phi}^+(W_i^{n+1}) + \bar{\Phi}^-(W_{i+1}^{n+1}). \quad (\text{A.17})$$

Dabei lautet der Van Leer Fluß in einem sich bewegenden Koordinatensystem folgendermaßen:

$$\bar{\Phi}^\pm(W_i^{n+1}) = \pm \frac{\rho}{4c} (\bar{v} \pm c)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{1}{\gamma} (2c - \bar{v}) + v \\ \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\gamma} (\bar{v} \mp 2c) \dot{x} + \frac{2c^2}{\gamma^2 - 1} + \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 \pm 2(\gamma-1)\bar{v}c}{\gamma^2 - 1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

In (A.18) werden dazu

$$\rho = \rho_i^{n+1}, \quad c^2 = \gamma \frac{p_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}}, \quad v = v_i^{n+1}, \quad \dot{x} = \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \bar{v} = v - \dot{x}$$

gesetzt. Als Randbedingungen werden für den Fluß am linken Randpunkt ($x = 0$)

$$\bar{\Phi}(W_0^{n+1}, W_1^{n+1}) = (0, p_1^{n+1}, p_1^{n+1} \dot{x}_1^{n+1})^t$$

und am rechten Randpunkt ($x = l + u$)

$$\bar{\Phi}(W_N^{n+1}, W_{N+1}^{n+1}) = (0, p_N^{n+1}, p_N^{n+1} w^*)^t$$

festgelegt, wobei

$$w^* = \frac{1}{2}(w^n + w^{n+1})$$

als Randbedingung für das Fluid gewählt wird. Abschließend muß noch ein Algorithmus für die Gitterbewegung bestimmt werden. Dazu wird eine einfache lineare Interpolation eingesetzt:

$$x_i^{n+1} = \frac{i-1}{N-1}(l + u^{n+1}), \quad \dot{x}_i^{n+1} = \frac{i-1}{N-1}w_i^{n+1}. \quad (\text{A.19})$$

Die entsprechenden Positionen und Gittergeschwindigkeiten für die Zellränder $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ lassen sich dann aus diesem Algorithmus berechnen.

Insgesamt erhält man damit für (A.15) ein nichtlineares Gleichungssystem für die Variablen W^{n+1} , das in jedem Zeitschritt zu lösen ist. Wir setzen dazu eine Newton-Raphson Iteration ein, in dem die Ableitungen der numerischen Flußvektoren nach den Variablen W_i^{n+1} zu bestimmen ist (vgl. [Blo98]). Wir haben jetzt in unserem Modellbeispiel die gleiche Ausgangssituation, die wir im vierten Kapitel bei der Entwicklung der Kopplungsalgorithmen als Grundlage hatten. Es sind jeweils (iterative) Löser für die Teilprobleme vorhanden, die miteinander gekoppelt werden sollen. Also können die im vierten Kapitel entwickelten stark gekoppelten Lösungsverfahren auf dieses Modellbeispiel angewendet und mit den Ergebnissen aus [Pip94] und [Blo98] verglichen werden. Zur numerischen Simulation des Modellbeispiels werden die folgenden Werte für die Parameter gewählt:

$$l = 1m, \rho_0 = 1.3kg/m, c = 328.17m/s, p_0 = 1 \cdot 10^5 Pa, m = 0.8kg, \omega_s = 100rad/s.$$

Die Dämpfung d der Struktur wird auf $d = 0$ gesetzt und die Steifigkeit k läßt sich durch den Zusammenhang $m\omega_s^2 = k$ berechnen. Die numerischen Ergebnisse der Simulation sind im vierten Kapitel zu finden.

Anhang B

Verwendete Software für die Beispiele

Wir können bei unseren Berechnungen keine kommerzielle Software wie z.B. ANSYS, PERMAS, MARC, CFX oder STAR-CD einsetzen, da bei diesen Programmen die Quellen im allgemeinen nicht verfügbar sind und damit auch das Testen neuer Kopplungsalgorithmen nicht möglich ist. Daher verwenden wir zwei an Universitäten entwickelte und frei verfügbare Programme (FEAP und FEATFLOW), die in den folgenden Abschnitten genauer beschrieben werden. Dieses hat den Vorteil, daß wir direkten Zugriff auf die Programmquellen haben, beinhaltet allerdings auch den Nachteil, daß für die Berechnung der Wechselwirkung von Fluid und Struktur einige Erweiterungen implementiert werden müssen, die in den kommerziellen Softwarepaketen größtenteils schon enthalten sind. So wurden hier insbesondere im Fluidlöser mehrere Erweiterungen implementiert, um Strömungen mit sich bewegenden Rändern zu simulieren. Die theoretischen Grundlagen für diese Erweiterungen wurden bereits im dritten Kapitel erläutert, im zweiten Teil des Anhangs B wird daher im wesentlichen nur noch die praktische Umsetzung in dem Strömungslöser kurz beschrieben.

B.1 Strukturmechanik (FEAP)

Für die Strukturmechanik setzen wir FEAP („Finite Element Analysis Program“) ein, das an der Universität von Kalifornien in Berkeley von Robert Taylor und anderen entwickelt wurde. Mit FEAP können lineare oder nichtlineare und statische oder dynamische Probleme der Strukturmechanik und Thermodynamik berechnet werden. Eine detaillierte Beschreibung des Programms ist in den entsprechenden Monographien von Zienkiewicz und Taylor [ZT91, ZT94] oder in dem Handbuch [Tay98] zu finden.

FEAP besteht im wesentlichen aus einzelnen Modulen, die dem Benutzer eine Problem-

```
macr                ! Beginn des Makros
beta, 0.25, 0.5      ! Newmark-Verfahren
dt,,0.05             ! Zeitschrittweite
cmas                ! Konsistente Massenmatrix
loop,time,10         ! Beginn der Zeitschleife
mac1
time                ! Nächster Zeitschritt
loop,iter,5          ! Beginn der Newton-Iteration
tang,,1             ! Lösen des linearen Systems
next,iter            ! Nächster Iterationsschritt
disp,all             ! Ausgabe der Verschiebungen
velo,all             ! Ausgabe der Geschwindigkeiten
stre,all             ! Ausgabe der Spannungen
mac2
next,time            ! Ende der Zeitschleife
end                  ! Ende des Makros
```

Abbildung B.1: *Berechnungsalgorithmus in FEAP-Makrosprache*

beschreibung („Preprocessing“), den Lösungsschritt („Solution Step“) und eine Visualisierung der Ergebnisse („Postprocessing“) ermöglichen. Dazu bietet es dem Benutzer eine Makrosprache an, mit der das Problem (Geometrie, Netzerzeugung, Randbedingungen, etc.) und ein Berechnungsalgorithmus (Newton-Iteration, Zeitschrittverfahren, usw.) definiert werden kann. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, neue Makros zu schreiben, so daß weitere Funktionen in das Programm eingebaut werden können. Diese Technik wird hier zum Beispiel verwendet, um den Datentransfer zwischen Strömungsprogramm und FEAP zu ermöglichen. So wurde in einem Makro (**mac1** in der Abbildung B.1) die Berechnung der Strukturlasten aufgrund der Fluidkräfte am Interface realisiert. In einem weiteren Makro (**mac2**) wird der Transfer der Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten der Struktur am Rand zum Fluidlöser integriert. Als Beispiel für die Makrosprache ist in Abbildung B.1 der Berechnungsalgorithmus aus einem Makroprogramm zu sehen, der für ein gestaffeltes Verfahren eingesetzt wurde.

In FEAP sind zahlreiche Finite Elemente Typen in einer Elementbibliothek vorgegeben. Dabei kann man zwischen ein-, zwei- und dreidimensionalen Elementen für lineare und nichtlineare Probleme der Strukturmechanik auswählen. Zum Beispiel sind geometrisch lineare und nichtlineare Balkenelemente oder auch komplexere Platten- und Schalenelemente implementiert. Weiter ist zu jedem Element ein Materialmodell festzulegen, wobei verschiedene Modelle für Elastizität, Viskoelastizität und Plastizität vorhanden sind. Zudem ist es möglich, weitere Elementtypen in FEAP einzubauen.

Zur Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme werden entweder direkte (Front- bzw. Hüllenmethoden) oder iterative Verfahren (vorkonditionierte konjugierte Gradienten Verfahren) verwendet. Bei der Berechnung von nichtlinearen Problemen werden das Newton-Verfahren und verschiedene Varianten davon angeboten. Für dynamische Probleme kann man – abhängig vom Problem – zwischen verschiedenen Methoden auswählen: dem impliziten Euler-Verfahren, dem verallgemeinerten Mittelpunktsverfahren oder der Familie der Hilber-Hughes-Taylor Methoden für Probleme zweiter Ordnung.

B.2 Strömungsmechanik (FEATFLOW)

Als Strömungslöser verwenden wir das Programm FEATFLOW, das an der Universität Heidelberg von Stefan Turek und seiner Arbeitsgruppe entwickelt wurde. In diesem Programm werden die instationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen berechnet. Für eine ausführliche Beschreibung des Programms sei auf das Handbuch [TB99] verwiesen, die zugrundeliegenden mathematischen Methoden werden in [Tur99] genauer erläutert. FEATFLOW baut auf dem Programmpaket FEAT („Finite Element Analysis Tool“) auf, das die einzelnen Bausteine eines Finite Elemente Programmes (Elemente, Aufbau von Massen- und Steifigkeitsmatrizen, Lösen von linearen oder nichtlinearen Gleichungssystemen, etc.) zur Verfügung stellt.

Das Programm kann – genauso wie FEAP – in drei Komponenten zerlegt werden. In einem Preprocessing-Schritt (OMEGA2D) werden die Geometrie des Problems und ein erstes sehr grobes Gitter erzeugt. Anschliessend kann eine Verfeinerung des Gitters mit dem Modul TRIGEN2D erfolgen. Zur numerischen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen kann zwischen einem Projektionsschema (PP2D) und voll gekoppelten Lösungsverfahren (CC2D oder CP2D) gewählt werden. Für den Postprocessing-Schritt können die verschiedenen Lösungskomponenten (wie z.B. der Druck, die Geschwindigkeiten oder die Stromlinien) in unterschiedlichen Datenformaten ausgegeben werden. Wir werden hier eine Visualisierung der Daten mit AVS („Advanced Visualization System“) vornehmen, es sind jedoch auch andere Formate (z.B. GMV) möglich.

Die Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen in FEATFLOW findet im Raum mit Finiten Elementen und in der Zeit mit Finiten Differenzen statt. Als Finite Elementen-

te Ansatzfunktionen werden Rechteck-Elemente benutzt, die analog zu den bekannten Dreiecks-Stokes Elementen von Crouzeix und Raviart hergeleitet werden können [Tur99]. Dabei werden in einem Rechteck-Element im zweidimensionalen Fall stückweise rotierte bilineare Formfunktionen für die Geschwindigkeiten und stückweise konstante Approximationen für den Druck verwendet. Die Vorteile dieses nichtkonformen Ansatzes werden in [Tur99] beschrieben. Die konvektiven Terme werden entweder mit einem Upwinding-Verfahren (Samarskij-Upwinding) oder mit einem Streamline-Diffusion Ansatz behandelt. Als Zeitschrittverfahren werden in FEATFLOW implizite Methoden eingesetzt. Diese Verfahren haben gegenüber expliziten Verfahren den großen Vorteil, daß sie ein wesentlich größeres Stabilitätsgebiet besitzen und daher größere Zeitschritte verwendet werden können. Allerdings haben sie den Nachteil, daß in jedem Zeitschritt ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muß, was einen höheren Berechnungsaufwand bedeutet. Man kann zwischen dem impliziten Euler-Verfahren, dem Crank-Nicolson-Schema oder der Zwischenschritt- θ -Methode auswählen. Für die Lösung der nach der Diskretisierung entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme gibt es zwei verschiedene Ansätze:

- Die nichtlinearen Gleichungen werden durch ein gekoppeltes Lösungsverfahren berechnet. Dazu wird eine adaptive Fixpunkt-Defektkorrektur-Methode eingesetzt. Dieses Verfahren besitzt die besten Stabilitätseigenschaften, aber es bedeutet auch den größten numerischen Aufwand. Die gekoppelten Lösungsverfahren sind in den Modulen CC2D und CP2D implementiert.
- Alternativ werden Projektionsverfahren verwendet, bei denen der Druck und die Geschwindigkeiten entkoppelt werden. Dadurch entsteht eine Folge von einfacheren diskreten Problemen, die in jedem Zeitschritt berechnet werden müssen. Allerdings führt dieses dazu, daß aus Stabilitätsgründen kleinere Zeitschritte als bei den gekoppelten Lösungsverfahren gewählt werden müssen. Die Projektionsverfahren sind in PP2D realisiert worden.

Wir haben für unsere Beispiele eines der gekoppelten Lösungsverfahren (CC2D) und als Zeitschrittverfahren die Zwischenschritt- θ -Methode verwendet. Die dabei entstehenden diskreten Gleichungssysteme werden daraufhin mit effizienten Mehrgitterverfahren gelöst.

B.3 Erweiterungen des Fluidlösers

In diesem Abschnitt sollen kurz die Erweiterungen beschrieben werden, die in dem Fluidprogramm zur Berechnung von Strömungen mit sich bewegenden Rändern durchgeführt wurden.

In FEATFLOW existiert bereits ein Modul, mit dem auch Strömungen mit beweglichen Rändern berechnet werden können. Hierbei wird ein Verfahren verwendet, das auf der

„Fictitious Boundary“-Methode beruht [GPP94]. Diese Methode berechnet die Navier-Stokes Gleichungen auf einem festen Gitter, bei dem diejenigen Elemente, die zu dem sich bewegenden Körper gehören, getrennt behandelt werden. Für diese Elemente wird eine feste Geschwindigkeit vorgegeben, und der Druck in diesen Elementen wird auf null gesetzt. Diese Technik ähnelt also der bei Finiten Differenzen Verfahren bekannten „Cell-and-Marker“-Technik [GDN95]. Für Probleme der Fluid-Struktur Interaktion ist diese Methode allerdings nur bedingt einsetzbar, da der Rand nicht sehr gut approximiert wird. Außerdem muß mit sehr feinen Gittern gerechnet werden, um den Rand überhaupt genau genug darstellen zu können. Hierdurch erhöht sich die Rechenzeit um einen sehr großen Faktor. Wir haben im ersten Beispiel diese Technik eingesetzt und mit dem von uns verwendeten Verfahren verglichen. Dabei haben wir festgestellt, daß die „Fictitious Boundary“-Methode für Fluid-Struktur Interaktion mit großen Verformungen der Struktur nicht geeignet ist.

Aus diesem Grund wurden in FEATFLOW mehrere Erweiterungen implementiert, die im folgenden kurz beschrieben werden sollen. Zum einen handelt es sich dabei um eine ALE-Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen, damit sich bewegende Ränder im Fluid berechnet werden können, zum anderen um die Bewegung des Fluidgitters, die eng mit der ALE-Formulierung verbunden ist. Wir haben die ALE-Formulierung dadurch in den Fluidlöser integriert, daß wir in der Variationsform der Impulsgleichung (2.15) die Terme, in denen die Gittergeschwindigkeit \dot{x} auftritt, auf die rechte Seite der Gleichung gebracht haben:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f(t)} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x_0} \right) \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Omega_f(t)} (\rho v \cdot \text{grad } v) \cdot \hat{v} \, dx + \nu \int_{\Omega_f(t)} \text{grad } v \cdot \text{grad } \hat{v} \, dx \\ + \int_{\Omega_f(t)} p \, \text{div } \hat{v} \, dx = \int_{\Omega_f(t)} g \cdot \hat{v} \, dx + \int_{\Gamma_{f,2}} \tau_f \cdot \hat{v} \, ds + \int_{\Omega_f(t)} (\rho \dot{x} \cdot \text{grad } v) \cdot \hat{v} \, dx \quad \forall \hat{v} \in V^f \end{aligned}$$

Der Term auf der rechten Seite, der die Gittergeschwindigkeit \dot{x} enthält, hängt linear von v ab und kann mit den bekannten Finite Elemente Techniken diskretisiert werden. Die diskrete Gittergeschwindigkeit \dot{X}_{n+1} wird in den Fluidelementen bzw. in den Knoten der Fluidelemente so bestimmt, daß das geometrische Erhaltungsgesetz erfüllt wird (vgl. Abschnitt 3.2):

$$\dot{X}_{n+1} = \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t}.$$

Das Fluidgitter wird als Pseudo-Struktursystem betrachtet und mit dem in Abschnitt 3.2 vorgestellten Netzbewegungsalgorithmus berechnet, dabei ist in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem der Form $\tilde{K} X_{n+1} = \tilde{F}$ zu lösen. Alternativ dazu haben wir zum Vergleich auch Interpolationsverfahren mit quadratischer Interpolation verwendet, die auf sehr ähnliche Ergebnisse wie der eingesetzte Algorithmus zur Netzbewegung führten.

Literaturverzeichnis

- [ADPW82] ARGYRIS, J., I. S. DOLTSINIS, P. M. PIMENTA und H. WÜSTENBERG: *Thermomechanical response of solids at high-strains – natural approach*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 32:3–57, 1982.
- [AG01] ARNOLD, M. und M. GÜNTHER: *Preconditioned dynamic iteration for coupled differential-algebraic systems*. BIT Numerical Mathematics, 41:1–25, 2001.
- [AM95] ARTLICH, S. und W. MACKENS: *Newton-coupling of fixed point iterations*. In: HACKBUSCH, W. und G. WITTUM (Herausgeber): *Numerical Treatment of Coupled Systems*, Band 51 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Seiten 1–10, Braunschweig, Wiesbaden, 1995. Vieweg.
- [Arn00] ARNOLD, M.: *Constraint partitioning in dynamic iteration methods*. ZAMM, 81:S735–S738, 2000.
- [Art96] ARTLICH, S.: *Zweidimensionale Simulation der Kohleverbrennung in Druckwirbelschichtfeuerungen*. Doktorarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1996.
- [Bat90] BATINA, J. T.: *Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes*. AIAA Journal, 28(8):1381–1388, 1990.
- [Blo98] BLOM, F. J.: *A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 167:369–391, 1998.
- [BM78] BELYTSCHKO, T. und R. MULLEN: *Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration*. Int. J. Num. Meth. Eng., 12:1575–1586, 1978.
- [Bra00] BRAESS, H.: *Untersuchung von Strömungen in zeitlich veränderlichen Gebieten mit der Methode der Finiten Elemente*. Doktorarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2000.

- [BS95] BUNGARTZ, H.-J. und S. SCHULTE: *Coupled problems in microsystem technology*. In: HACKBUSCH, W. und G. WITTUM (Herausgeber): *Numerical Treatment of Coupled Systems*, Band 51 der Reihe *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Seiten 11–24, Braunschweig, Wiesbaden, 1995. Vieweg.
- [BWHS97] BRAKKEE, E., K. WOLF, D. PHUOC HO und T. SCHÜLLER: *The COupling COmmunications LIBrary*. In: *Proceedings of the Fifth Euromicro Workshop on Parallel and Distributed Processing, London*, Seiten 155–163, Los Alamitos, California, 1997. IEEE Computer Society Press.
- [CC96] CODINA, R. und M. CERVERA: *On the computational efficiency and implementation of block-iterative algorithms for nonlinear coupled problems*. Eng. Comp., 13(6):4–30, 1996.
- [Cha85] CHAN, T. F.: *An approximate newton method for coupled nonlinear systems*. SIAM J. Numer. Anal., 22(5):904–913, 1985.
- [CL97] CEBRAL, J. R. und R. LÖHNER: *Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems*. AIAA Journal, 35(4):687–692, 1997.
- [DGH82] DONEA, J., S. GIULIANI und J. P. HALLEUX: *An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient fluid-structure interaction*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 33:689–723, 1982.
- [DL96] DENNIS, J. und R. LOFT: *The glue that holds it together: NCAR's model coupling library*. In: *Proceedings of the 7th ECMWF Workshop on the Use of Parallel Computers in Meteorology*, Reading, 1996.
- [Don83] DONEA, J.: *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods*. In: BE-LYTSCHKO, T. und T. J. R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 473–516, Amsterdam, New York, 1983. North-Holland.
- [DPM95] DUBINI, G., R. PIETRABISSI und F. M. MONTEVECCHI: *Fluid-structure interaction in bio-fluid mechanics*. Med. Eng. Phys., 17(8):609–617, 1995.
- [Far97] FARHAT, C.: *Parallel and distributed solution of coupled nonlinear dynamic aeroelastic response problems*. In: PAPADRAKAKIS, M. (Herausgeber): *Parallel Solution Methods in Computational Mechanics*, Seiten 243–301, Chichester, 1997. John Wiley & Sons.

- [Fis97] FISCHER, J.: *Anwendung eines approximativen Newtonverfahrens auf Finite-Volumen-diskretisierte Navier-Stokes Gleichungen*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1997.
- [FL00] FARHAT, C. und M. LESOINNE: *Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 182:499–515, 2000.
- [Fle91a] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Band 2. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1991.
- [Fle91b] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Band 1. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1991.
- [FLL98] FARHAT, C., M. LESOINNE und P. LETALLEC: *Load and motion transfer algorithms for fluid-structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 157:95–114, 1998.
- [FLM95] FARHAT, C., M. LESOINNE und N. MAMAN: *Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: three-field formulation, geometric conservation law and distributed solution*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 21:807–835, 1995.
- [FLS97] FARHAT, C., M. LESOINNE und P. STERN: *High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms: methodology and preliminary results*. Advances in Engineering Software, 28:43–61, 1997.
- [FP80] FELIPPA, C. A. und K. C. PARK: *Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems: formulation*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 24:61–111, 1980.
- [FP96] FERZIGER, J. H. und M. PERIĆ: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [FPDP91] FARHAT, C., K. C. PARK und Y. DUBOIS-PELERIN: *An unconditionally stable staggered algorithm for transient finite element analysis of coupled thermoelastic problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 85:349–365, 1991.

- [GDN95] GRIEBEL, M., T. DORNSEIFER und T. NEUNHOEFFER: *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1. Auflage, 1995.
- [GF98] GUILLARD, H. und C. FARHAT: *On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes*. Technischer Bericht, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, August 1998.
- [GLS94] GROPP, WILLIAM, EWING LUSK und ANTHONY SKJELLUM: *Using MPI: Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface*. Scientific and Engineering Computation. MIT Press, Massachusetts, 1994.
- [GPP94] GLOWINSKI, R., T.-W. PAN, and J. PERIAUX: *A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 112, 1994.
- [Gra98] GRANDMONT, C.: *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'interaction fluide-structure*. Doktorarbeit, Université de Paris 6, Januar 1998.
- [HH88] HUGHES, T. J. R. und G. M. HULBERT: *Space-time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 66:339–363, 1988.
- [Hie99] HIERHOLZ, K.-H.: *Ein numerisches Verfahren zur Simulation der Strömungs-Struktur-Interaktion am Hubschrauberrotor*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1999.
- [HL78] HUGHES, T. J. R. und W. K. LIU: *Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory*. J. Appl. Mech., 45:371–374, 1978.
- [HLZ81] HUGHES, T. J. R., W. K. LIU und T. K. ZIMMERMANN: *Lagrange-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 29:329–349, 1981.
- [HWD01] HÜBNER, B., E. WALHORN und D. DINKLER: *Strongly coupled analysis of fluid-structure interaction using space-time finite elements*. In: *European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, 2001.
- [Kel77] KELLER, H. B.: *Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. In: RABINOWITZ, P. (Herausgeber): *Application of Bifurcation Theory*, Seiten 359–384, New York, 1977. Academic Press.

- [KS92] KERKHOVEN, T. und Y. SAAD: *On acceleration methods for coupled nonlinear elliptic systems*. Numerische Mathematik, Seiten 525–548, 1992.
- [Kuh96] KUHLE, D.: *Stabile Zeitintegrationsverfahren in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1996.
- [LF96] LESOINNE, M. und C. FARHAT: *Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 134:71–90, 1996.
- [LM97] LACOUR, C. und Y. MADAY: *Two different approaches for matching non-conforming grids: the mortar element method and the feti method*. BIT, 37(3):720–738, 1997.
- [LM01] LETALLEC, P. und S. MANI: *Numerical analysis of a linearised fluid-structure interaction problem*. Numerische Mathematik, 87(2):317–354, 2001.
- [Men99] MENCK, J.: *Work Control for Newton Type Coupling*. In: KEIL, F., W. MACKENS, H. VOSS und J. WERTHER (Herausgeber): *Scientific Computing in Chemical Engineering*, Seiten 192–199, Berlin, Heidelberg, New York, 1999. Springer.
- [MF95] MAMAN, N. und C. FARHAT: *Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations: a parallel approach*. Comp. Struct., 54:779–785, 1995.
- [MH97] MASUD, A. und T. J. R. HUGHES: *A space-time Galerkin/least squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domains*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 146:91–126, 1997.
- [Mie88] MIEHE, C.: *Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 1988.
- [ML01] MOURO, J. und P. LETALLEC: *Fluid structure interaction with large structural displacements*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 190:3039–3067, 2001.
- [MMV98a] MACKENS, W., J. MENCK und H. VOSS: *Numerical System Synthesis: Concepts for Coupling Subsystem Solvers*. Technischer Bericht, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1998.
- [MMV98b] MORTON, S. A., R. B. MELVILLE und M. .R. VISBAL: *Accuracy and coupling issues of aeroelastic Navier-Stokes solutions on deforming meshes*. Journal of Aircraft, 35(5):798–805, 1998.

- [MMV99a] MACKENS, W., J. MENCK und H. VOSS: *Coupling Iterative Subsystem Solvers*. In: KEIL, F., W. MACKENS, H. VOSS und J. WERTHER (Herausgeber): *Scientific Computing in Chemical Engineering*, Seiten 184–191, Berlin, Heidelberg, New York, 1999. Springer.
- [MMV99b] MACKENS, W., J. MENCK und H. VOSS: *Numerical coupling of subsystems*. Z. Angew. Math. Mech., 79(S3):S871–S872, 1999.
- [MN87] MIEKKALA, U. und O. NEVANLINNA: *An approximate newton method for coupled nonlinear systems*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8:459–482, 1987.
- [Mün98a] MÜNCH, M.: *GRISSLi-Abschlußbericht, Teil 2: Ergebnisbericht*. Technischer Bericht, IBM High Performance Support Center, Heidelberg, Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen, GMD St. Augustin, Institut für Parallele und Verteilte Höchstleistungsrechner, Universität Stuttgart, 1998.
- [Mün98b] MÜNCH, M.: *GRISSLi-Kopplungsinterface, Handbuch für die Anwendungsprogrammierung*. IBM High Performance Support Center, Heidelberg, Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen, GMD St. Augustin, Institut für Parallele und Verteilte Höchstleistungsrechner, Universität Stuttgart, 1998.
- [MO95] MORAND, H. und R. OHAYON: *Fluid-Structure Interaction*. John Wileys & Sons, Chichester, 1995.
- [MS00] MATTHIES, H. G. und J. STEINDORF: *Efficient iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction problems*. In: TOPPING, B. H. V. (Herausgeber): *Computational Mechanics: Techniques and Developments*, Seiten 263–267, Edinburgh, 2000. Civil-Comp Press.
- [MU94] MÜLLER-URBANIAK, S.: *Eine Analyse des Zwischenschritt- θ -Verfahrens zur Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen*. Doktorarbeit, Universität Heidelberg, 1994.
- [MW01] MOK, D. P. und W. A. WALL: *Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures*. In: WALL, W. A., K.-U. BLETZINGER und K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Barcelona, Spain, 2001. CIM-NE.
- [NV99] NOBILE, F. und A. VENEZIANI: *Fluid-structure interaction in blood flow problems*. Z. Angew. Math. Mech., 79(S1):S255–S258, 1999.

- [OR00] ORTEGA, J. M. und W. C. RHEINBOLDT: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Band 30 der Reihe *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [Pah98] PAHLKE, K.: *Berechnung von Strömungsfeldern um Hubschrauberrotoren im Vorwärtsflug durch die Lösung der Euler-Gleichungen*. Doktorarbeit, Technische Universität Braunschweig, 1998.
- [Par80] PARK, K. C.: *Partitioned transient analysis procedures for coupled-field problems: stability analysis*. J. Appl. Mech., 47:370–376, 1980.
- [PF83] PARK, K. C. und C. A. FELIPPA: *Partitioned analysis of coupled systems*. In: BELYTSCHKO, T. und T. J. R. HUGHES (Herausgeber): *Computational Methods for Transient Analysis*, Seiten 157–219, Amsterdam, New York, 1983. North-Holland.
- [PF84] PARK, K. C. und C. A. FELIPPA: *Recent development in coupled field analysis methods*. In: LEWIS, R. W., P. BETTESS und E. HINTON (Herausgeber): *Numerical Methods in Coupled Systems*, Seiten 327–352, Chichester, 1984. John Wileys & Sons.
- [PF97] PIPERNO, S. und C. FARHAT: *Design and evaluation of staggered partitioned procedures for fluid-structure interaction simulations*. Technischer Bericht, INRIA, Sophia Antipolis Cedex, September 1997.
- [PFL95] PIPERNO, S., C. FARHAT und B. LARROUTUROU: *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 124:79–112, 1995.
- [Pip94] PIPERNO, S.: *Staggered time integration methods for a one-dimensional Euler aeroelastic problem*. Technischer Bericht, INRIA Sophia Antipolis Cedex, Juni 1994.
- [Pip97] PIPERNO, S.: *Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 25:1207–1226, 1997.
- [RJW⁺99] RIFAI, S. M., Z. JOHAN, W.-P. WANG, J.-P. GRISVAL, T. J. R. HUGHES und R. M. FERENCZ: *Multiphysics simulation of flow-induced vibrations and aeroelasticity on parallel computing platforms*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 174:393–417, 1999.

- [SA00] SIMEON, B. und M. ARNOLD: *Coupling DAEs and PDEs for simulating the interaction of pantograph and catenary*. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 6:129–144, 2000.
- [SM99] STEINDORF, J. und H. G. MATTHIES: *Efficient partitioned methods for the computation of fluid-structure interaction on parallel computers*. In: TOPPING, B. H. V. (Herausgeber): *Developments in Computational Mechanics with High Performance Computing*, Seiten 127–136, Edinburgh, 1999. Civil-Comp Press.
- [Tay98] TAYLOR, R. L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Program, User Manual Version 6.3*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, California, 1998.
- [TB99] TUREK, S. und C. BECKER: *FEATFLOW User Manual Release 1.2*. Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Heidelberg, 1999.
- [TL79] THOMAS, P. D. und C. K. LOMBARD: *Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids*. AIAA Journal, 17(10):1030–1037, 1979.
- [Tur99] TUREK, S.: *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems: An Algorithmic Approach in View of Computational Aspects*, Band 6 der Reihe *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [VA99] VEITL, A. und M. ARNOLD: *Coupled simulation of multibody systems and elastic structures*. In: AMBROSIO, J. A. C. und W. O. SCHIEHLEN (Herausgeber): *Advances in Computational Multibody Dynamics*, Seiten 635–644, Lissabon, Portugal, 1999.
- [Wal99] WALL, W. A.: *Fluid-Struktur Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1999.
- [WR98] WALL, W. A. und E. RAMM: *Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method*. In: IDELSOHN, S., E. ONATE und E. DVORKIN (Herausgeber): *4th World Congress on Computational Mechanics - New Trends and Applications*, Barcelona, 1998. CIMNE.
- [Wri01] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.

- [ZC89] ZIENKIEWICZ, O. C. und A. H. C. CHAN: *Coupled problems and their numerical solution*. In: DOLTSINIS, I. S. (Herausgeber): *Advances in Computational Nonlinear Mechanics*, Seiten 139–164, Berlin, Heidelberg, New York, 1989. Springer.
- [Zie84] ZIENKIEWICZ, O. C.: *Coupled problems and their numerical solution*. In: LEWIS, R. W., P. BETTESS und E. HINTON (Herausgeber): *Numerical Methods in Coupled Systems*, Seiten 35–58, Chichester, 1984. John Wileys & Sons.
- [ZPC88] ZIENKIEWICZ, O. C., D. K. PAUL und A. H. C. CHAN: *Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems*. Int. J. Num. Meth. Eng., 26:1039–1055, 1988.
- [ZT91] ZIENKIEWICZ, O. C. und R. L. TAYLOR: *The Finite Element Method*, Band 2. McGraw-Hill, London, New York, 4. Auflage, 1991.
- [ZT94] ZIENKIEWICZ, O. C. und R. L. TAYLOR: *The Finite Element Method*, Band 1. McGraw-Hill, London, New York, 4. Auflage, 1994.

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | <i>Geplantes Großraumflugzeug A3XX</i> | 10 |
| 1.2 | <i>Schwingungen der Tacoma-Brücke</i> | 11 |
| 1.3 | <i>Simultane Lösung während eines Zeitschritts</i> | 13 |
| 1.4 | <i>Modulare Lösung während eines Zeitschritts (mit äußerer Iteration)</i> | 14 |
| 2.1 | <i>Verschiedene Koordinatensysteme bei der ALE-Formulierung</i> | 24 |
| 3.1 | <i>Inkompatible Gitter am Fluid-Struktur-Interface</i> | 44 |
| 3.2 | <i>Projektion eines Fluidgitterpunktes in das Strukturelement</i> | 46 |
| 3.3 | <i>Verschiedene Gitter am Rand der Struktur</i> | 50 |
| 4.1 | <i>Konventionelles gestaffeltes Verfahren (Datenfluß)</i> | 58 |
| 4.2 | <i>Zeitabhängigkeiten bei gestaffelten Verfahren</i> | 58 |
| 4.3 | <i>Abstrakte Form des konventionellen gestaffelten Verfahrens</i> | 59 |
| 4.4 | <i>Instabilität des gestaffelten Verfahrens</i> | 60 |
| 4.5 | <i>Gestaffeltes Verfahren mit Subcycling im Fluid</i> | 61 |
| 4.6 | <i>Abstrakte Form des gestaffelten Verfahrens mit Extrapolation</i> | 63 |
| 4.7 | <i>Einfluß der Extrapolation</i> | 64 |
| 4.8 | <i>Einfacher paralleler Kopplungsalgorithmus</i> | 66 |
| 4.9 | <i>Abstrakte Form des einfachen parallelen Kopplungsalgorithmus</i> | 67 |
| 4.10 | <i>Vergleich des parallelen Kopplungsalgorithmus mit gestaffeltem Verfahren</i> | 68 |
| 4.11 | <i>Verbesserter paralleler Kopplungsalgorithmus</i> | 69 |
| 4.12 | <i>Abstrakte Form des semi-impliziten Kopplungsalgorithmus</i> | 71 |
| 4.13 | <i>Lösung mit Block-Gauß-Seidel Verfahren</i> | 72 |
| 4.14 | <i>Abstrakte Form des voll impliziten Kopplungsalgorithmus</i> | 75 |
| 4.15 | <i>Block-Jakobi oder Block-Gauß-Seidel Verfahren</i> | 86 |
| 4.16 | <i>Ein Schritt der Block-Newton Iteration</i> | 88 |
| 4.17 | <i>Vergleich mit monolithischem Lösungsverfahren</i> | 90 |
| 4.18 | <i>Iterationsanzahl für die Block-iterativen Verfahren</i> | 91 |
| 4.19 | <i>Löseraufrufe für die Block-iterativen Verfahren</i> | 92 |
| 5.1 | <i>Strukturiertes Rechteckgitter im Fluid</i> | 94 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.2 | <i>Strukturiertes Dreieckgitter in der Struktur</i> | 95 |
| 5.3 | <i>Kopplung von Anwendungsprogrammen mit GRISSLi</i> | 97 |
| 5.4 | <i>Das Konzept der Gittervariablen in GRISSLi</i> | 98 |
| 5.5 | <i>Das Konzept der Synchronisationspunkte in GRISSLi</i> | 102 |
| 5.6 | <i>Realisierung der Block-Newton Iteration in GRISSLi</i> | 103 |
| 5.7 | <i>Realisierung der Bi-CGSTAB Iteration in GRISSLi</i> | 104 |
| 6.1 | <i>Partikel in einem Strömungskanal</i> | 106 |
| 6.2 | <i>Partikelverschiebungen und Fluidkräfte in x-Richtung</i> | 107 |
| 6.3 | <i>Partikelverschiebungen und Fluidkräfte in y-Richtung</i> | 108 |
| 6.4 | <i>Druckfelder der Partikelumströmung zu verschiedenen Zeitpunkten (links ALE-Formulierung, rechts „Fictitious Boundary Method“)</i> | 109 |
| 6.5 | <i>Elastische Struktur in Strömung</i> | 110 |
| 6.6 | <i>Verformung des Fluidgitters zum Zeitpunkt $t = 0.36$ (elastische Struktur in Strömung)</i> | 111 |
| 6.7 | <i>Verschiebungen des Strukturendes für verschiedene Kopplungsalgorithmen (elastische Struktur in Strömung)</i> | 112 |
| 6.8 | <i>Anzahl der Iterationen bei den stark gekoppelten Lösungsverfahren (elasti- sche Struktur in Strömung)</i> | 113 |
| 6.9 | <i>Anzahl der Lösungsschritte für die stark gekoppelten Lösungsverfahren (ela- stische Struktur in Strömung)</i> | 114 |
| 6.10 | <i>Druckwerte zur Zeit $t = 0.03$ und $t = 0.18$ für die elastische Struktur in Strömung</i> | 115 |
| 6.11 | <i>Wirbelerregte elastische Struktur</i> | 116 |
| 6.12 | <i>Instabilität des gestaffelten Verfahrens für $\Delta t = 0.02$ (wirbelerregte elasti- sche Struktur)</i> | 118 |
| 6.13 | <i>Verschiebungen des Strukturendes für die stark gekoppelten Lösungsverfah- ren (wirbelerregte elastische Struktur)</i> | 119 |
| 6.14 | <i>Anzahl der Iterationen bei den stark gekoppelten Lösungsverfahren (wirbel- erregte elastische Struktur)</i> | 120 |
| 6.15 | <i>Anzahl der Lösungsschritte für die stark gekoppelten Lösungsverfahren (wir- belerregte elastische Struktur)</i> | 121 |
| 6.16 | <i>Verformung des Netzes zu verschiedenen Zeitpunkten</i> | 122 |
| 6.17 | <i>Druckbilder der wirbelerregten elastischen Struktur zu verschiedenen Zeit- punkten</i> | 123 |
| A.1 | <i>Geometrie des Modellbeispiels</i> | 128 |
| B.1 | <i>Berechnungsalgorithmus in FEAP-Makrosprache</i> | 133 |